KAJIAN HUBUNGAN OPERATOR *ACCRETIVE* DAN OPERATOR NON NEGATIF

Susilo Hariyanto[1], YD. Sumanto[2], Solikhin[3], Abdul Aziz[4], Razis Aji Saputro[5]
[1,2,3,4,5]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. Soedarto, SH, Tembalang Semarang
sus2_hariyanto@yahoo.co.id[1], ydsumanto@gmail.com[2], soli_erf@yahoo.com[3], abdul_aziz01@yahoo.com[4], razisaji25@gmail.com[5].

Abstrak

Operator adalah suatu pemetaan dari ruang vektor ke ruang vektor. Jika operator ini memenuhi sifat linier,maka disebut operator linier. Dalam artikel ini akan dikaji mengenai suatu jenis operator linier tertentu yangdidefinisikan pada ruang Hilbert dan memiliki sifat bagian riil dari hasil kali dalamnya harus bernilai positif ataunol. Selanjutnya operator yang memenuhi sifat ini dinamakan dengan operator accretive. Selain operatoraccretive akan dikaji pula suatu jenis operator linier yang memiliki sifat hasil kali dalamnya dari bentuk tertentuharus bernilai positif atau nol. Operator ini disebut operator non negatif. Untuk memperjelas karakteristik darikedua jenis ini masing-masing akan dibahas secara rinci dan diberikan contoh. Disamping itu hubungan antaraoperator accretive dan operator non negatif juga merupakan salah satu pokok bahasan yang menarik. Olehkarena itu artikel ini juga membahas hubungan keduanya. Dari hubungan antara operator accretive dan operatornon negatif akan diperoleh suatu pernyataan bahwa jika T adalah suatu operator accretive maka T merupakanoperator non negatif, namun demikian hal ini tidak berlaku sebaliknya. Akhirnya hubungan kedua operatortersebut dinyatakan dalam suatu teorema yang akan menjadi inti kajian dari artikel ini.

Kata Kunci: *Acrretive*, Non negatif, Operator.

1. PENDAHULUAN

Analisa fungsional adalah cabang dari ilmu matematika yang membahas berbagai macam teori dasar matematika. Salah satu tinjauan pokok dari analisa fungsional yaitu mengenai operator. Operator membahas tentang pemetaan yang mengawankan ruang vektor ke ruang vektor. Ruang vektor adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi penjumlahan dan perkalian pada skalar pada suatu lapangan. Pada pembahasan ruang vektor yang berhubungan dengan ruang metrik dalam analisa fungsional akan lebih sering dibahas mengenai konsep kekontinuan dan kekonvergenan pada barisan dalam ruang vektor sehingga terdapat suatu topologi atau sifat-sifat yang mempengaruhi.

Didalam analisa fungsional terdapat beberapa kajian tentang berbagai operator. Beberapa kajian tersebut diantaraya operator *adjoint*, operator *self-adjoint*, operator *simetrik*, operator *uniter*, dan lain lain. Pada pembahasan ini dibahas mengenai salah satu jenis operator yaitu tentang operator *accretive*dan operator non-negatif. Selanjutnya operator *accretive* merupakan suatu operator linier yang secara khusus merupakan operator *self-adjoint* non-negatif dan operator non-negatif adalah operator yang selalu bernilai 0 atau positif. Pada kajian makalah ini akan dikaji terlebih dahulu mengenai definisioperator linier dancontoh-contohnya sebagai toeri penunjang pembahasan. Pada pembahasan akan dikaji mengenai definisi operator non-negatif, definisi operator *accretive*, dan teorema hubungan antara operator non-negatif dengan operator *accretive.*

2. METODE PENELITIAN

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai operator linier yang meliputi definisi operator linier, dan beberapa teorema yang berlaku pada operator linier. Operator merupakan pemetaan dari ruang vektor ke ruang vektor. Agar lebih memahami operator linier maka akan diberikan penjelasan dengan definisi berikut.

***Definisi* 2.1 [3]**

Suatu pemetaan pada ruang vektor ke ruang vektor disebut operator.

***Definisi* 2.2 [2]**

Operator linier T adalah operator yang memenuhi

1. Domain $D(T)$ dari Tadalah ruang vektor dan range $R(T)$ berada di ruang vektor atas lapangan yang sama.
2. Untuk setiap $x, y \in D(T)$dan skalar α berlaku
$$T(x+y) = T(x) + T(y) \text{dan } T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Suatu operator $T: X \rightarrow Y$disebut operator dari ruang Xke Y. Sedangkan $T: X \rightarrow X$merupakan operator yang memetakan ke dirinya sendiri disebut operator pada$X$.

***Definisi* 2.3[5]**

Jika V dan W adalah ruang vektor dan T adalah operator. Jika T memetakan suatu vektor$v \in V$ ke $w \in W$, maka dituliskan dengan$w = T(v)$ dan dikatakan bahwa w adalah bayangan dari $v$oleh$T$ dan ruang vektor V dinamakan domain T.

Contoh 2.1

Diberikan suatu pemetaan ruang vektor $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan $T(x, y, z) = (x - y + z, 0)$. Maka operator T merupakan operator linier.

Contoh 2.2

Diberikan suatu ruang vektor yaitu ℓ_∞ didefinisikan suatu pemetaan $T: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ dengan $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Maka operator$T$ merupakan operator linier.

***Teorema* 2.4[5]**

Misalkan Xdan Ymerupakan ruang vektor atas himpunan bilangan riil. Jika $T: X \rightarrow Y$merupakan suatu operator linier, maka berlaku

1. $T(\theta) = \theta$ dengan $0x = \theta$untuk setiap$x \in X$.
2. $T(-x) = -T(x)$untuk setiap$x \in X$
3. $T(x-y) = T(x) - T(y)$untuk setiap$x, y \in X$.

Bukti :

1. Misalkan $x \in X$dengan kata lain $x$merupakan vektor pada X oleh karena itu berlaku $0x = \theta \in X$dengan $0 \in \mathbb{R}$. Karena$T$merupakan operator linier sehingga berlaku
$$T(\theta) = T(0x) = 0T(x) = \theta$$
2. Diberikan$x \in X$ dan $-x \in X$. Dengan T adalah operator linier sehingga diperoleh
$$T(-x) = T\big((-1)x\big) = (-1)T(x) = -T(x)$$
3. Diberikan $x, y \in X$dengan kata lain $x$dan $y$merupakan vektor di$X$. Sehingga selisih antar vektor tersebut dapat dinyatakan dengan$x - y = x + (-1)y$. Oleh karena Toperator linier sehingga
$T(x-y) = T(x + (-1)y) = T(x) + T(-1)(y) = T(x) - T(y)$.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pembahasan akan dijabarkan tentang definisi operator *accretive* dan operator non-negatif. Selanjutnya akan diteliti tentang hubungan kedua operator tersebut, sehingga akan menghasilkan teorema dari hasil penelitian. Pertama akan dibahas pengenai definisi dan contoh operator *accretive* beserta definisi dan contoh operator non-negatif.

***Definisi* 3.1[1]**

Diberikan operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$dengan $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ adalah koleksi operator linier di ruang Hilbert. Operator Tdisebut *accretive,* jika bagian riil dari $\langle Tu, u\rangle$ yang dinotasikan $Re\langle Tu, u\rangle \geq 0$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}$.

Contoh 3.1

Diberikan operator identitas$I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kemudian didefinisikan dengan $Ix = x$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$. Akan ditunjukkan bahwa operator$I$ tersebut *accretive* dengan memenuhi $Re\langle \mathrm{I}x, x\rangle \geq 0$

Bukti:Akan dibuktikan bahwa I adalah operator *accretive*. Diambil untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ akan berlaku$Ix = x$, sedemikian hingga

$\langle I\mathrm{x}, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \geq 0$,untuk setiap $x \in \mathcal{H}$.

Karena $Re\langle I\mathrm{x}, x\rangle = \|x\|^2 \geq 0$ untuk setiap $x \in \mathcal{H}$ sehingga terbukti bahwa operator I adalah operator *accretive*.

Contoh 3.2

Diberikan operator linier metrik $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. didefinisikan inner produk

$$\langle u, v\rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}$$

untuk setiap $u = (z_1, z_2), v = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ dan$z = a + bi$. Operator$T$ tersebut *accretive.*

Bukti: Diketahui operator linier metrik $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Diambil sebarang $u \in \mathbb{C}^2$ dengan $u = (z_1, z_2)$, maka

$$\langle \mathrm{T}u, u\rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\rangle$$

$$= \langle \begin{bmatrix} z_1 - z_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\rangle$$

dengan menggunakan definisi inner produk diperoleh

$$= (z_1 - z_2)\overline{z_1} + (z_1 + z_2)\overline{z_2}$$

$$= (z_1 - z_2)\overline{z_1} + (z_1 + z_2)\overline{z_2}$$

$$= z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2}$$

$$= |z_1|^2 - z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2$$

karena $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$, $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$, dan $|z\ \ |^2 = a^2 + b^2$ maka diperoleh

$$= {a_1}^2 + {b_1}^2 - (a_2 + b_2 i)(a_1 - b_1 i) + (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i) + {a_2}^2 + {b_2}^2$$

$$= {a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2 - (a_1 a_2 + a_1 b_2 i - a_2 b_1 i + b_1 b_2) +$$

$$(a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2)$$

$$= {a_1}^2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i$$

$$= ({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) - 2a_1 b_2 i + 2a_2 b_1 i$$

sehingga nilai $Re\langle \mathrm{T}u, u\rangle = ({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) \geq 0$, maka dapat disimpulkan bahwa T adalah operator *accretive.*

***Definisi* 3.2 [4]**

Diberikan operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$dengan $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ adalah koleksi operator linier di ruang Hilbert. Operator Tdisebut non negatif, jika$\langle Tu, u\rangle \geq 0$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}$.

Contoh 3.3

Diberikan operator linier metrik $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. didefinisikan inner produk

$$\langle u, v\rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}$$

untuk setiap $u = (z_1, z_2), v = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ dan$z = a + bi$. Akan ditunjukkan bahwa operator$T$ tersebut *accretive.*

Bukti:Diketahui operator linier metrik $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Diambil sebarang $u \in \mathbb{C}^2$ sedemikian sehingga $Re\langle \mathrm{T}u, u\rangle \geq 0$, maka

$$\langle \mathrm{T}u, u\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right\rangle$$

dengan menggunakan definisi inner produk diperoleh

$$= (z_1 + z_2)\overline{z_1} + (z_1 + z_2)\overline{z_2}$$

$$= (z_1 + z_2)\overline{z_1} + (z_1 + z_2)\overline{z_2}$$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2}$$

 ISSN: 2502-6526

$= |z_1|^2 + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + |z_2|^2.$

Oleh karena

$z_1 = a_1 + b_1 i,\quad z_2 = a_2 + b_2 i,\quad \overline{z_1} = a_1 - b_1 i,\quad \overline{z_2} = a_2 - b_2 i$, dan $|z\ \ |^2 = a^2 + b^2$ maka diperoleh

$$= {a_1}^2 + {b_1}^2 + (a_2 + b_2 i)(a_1 - b_1 i) + (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i) + {a_2}^2 + {b_2}^2$$

$$= {a_1}^2 + {b_1}^2 + {a_2}^2 + {b_2}^2 + (a_1 a_2 + a_1 b_2 i - a_2 b_1 i + b_1 b_2) +$$

$$(a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2)$$

$$= {a_1}^2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + 2a_1 a_2 + 2b_1 b_2$$

$$= ({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)$$

$$= {a_1}^2 + 2a_1 a_2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + 2b_1 b_2 + {b_2}^2 + 2b_1 b_2$$

$$= (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \geq 0$$

Sehingga nilai $\langle \mathrm{T}u, u\rangle = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \geq 0$,dan dapat disimpulkan bahwa T adalah operator non-negatif

Kemudian dari definisi operator *accretive* dan operator non-negatif selanjutnya dikaji hubungan antara kedua operator yan dijelaskan oleh teorema berikut.

***Teorema* 3.3**

Jika operator T adalah *accretive* maka operator T juga merupakan operator non-negatif.

Bukti:

Diketahui bahwa operator T adalah operator *accretive*. Dengan definisi operator *accretive* sedemikian hingga berlaku $Re\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq 0$ untuk $x \in \mathcal{H}$. Dibuktikan bahwa operator *accretive* merupakan operator non-negatif. Diambil *sembarang* $x \in \mathcal{H}$ sedemikian hingga memenuhi

$$\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq Re\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq 0$$

karena $\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq 0$ merupakan definisi terpenuhinya operator non-negatif dan $\langle \mathrm{T}x, x\rangle$ memiliki bagian riil dan bagian imaginer maka akan memiliki hubungan lebih besar sama dengan dengan operator *accretive* serta keduanya selalu bernilai non-negatif maka terbukti bahwa operator *accretive* merupakan operator non-negatif.Tidak berlaku sebaliknya.

Contoh 3.4

Diberikan operator linier metrik $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. didefinisikan inner produk

$$\langle u, v\rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2}$$

untuk setiap $u = (z_1, z_2), v = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ dan$z = a + bi$. Operator$T$ tersebut *accretive.*Kemudian operator Tjuga merupakan operator non-negatif.

Bukti:

Diketahui $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$adalahoperator accretive. Akan ditunjukkan bahwa T operator non-negatif. Dari pembuktian operator *accretive* diperoleh

$$\langle \mathrm{T}u, u\rangle = (a_1{}^2 + a_2{}^2) + (b_1{}^2 + b_2{}^2) - 2a_1b_2i + 2a_2b_1i$$

Karena $Re\langle \mathrm{T}u, u\rangle$ bernilai positif maka benar bahwa T merupakan operator *accretive* Kemudian berakibat $\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq Re\langle \mathrm{T}x, x\rangle \geq 0$ sehingga T

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil kajian dalam paper ini maka dapat disimpulkan pengertian tentang operator accretive, operator non-negatif, dan hubungan keduanya. Adapun pengertian operator *accretive*adalah operator yang mensyaratkanbagian riil dari dari hasil operasi inner produk$\langle Tu, u\rangle$bernilai lebih besar atau sama dengan nol untuk setiap $u \in \mathcal{H}$.atau dinotasikan$Re\langle Tu, u\rangle \geq 0$.Sedangkan pengertian operator non-negatif adalah operator yang mensyaratkan hasil operasi inner produk$\langle Tu, u\rangle \geq 0$ untuk setiap $u \in \mathcal{H}$.Kemudian hubungan antara operator *accreitive* dan operator non-negatif adalah jika operator T adalah *accretive* maka operator T juga merupakan operator non-negatif.

5. DAFTAR PUSTAKA

M[C]Intosh, Alan. (2010). *Functional Calculi*. Lashi Bandara.

Darmawijaya,Soeparna. (2007). *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: UGM.

Kreyszig, Erwin. (1978). *Introductory Functional Analysis with Application*. Wiley Classics Library.

Wiedmann, Joachim. (1980). *Linier Operator ini Hilbert Spaces*. New York: Springer-Verlag.

Anton, Howard. (1978). *Elementary Linier Algera Teenth Edition*. New York: Jhon Wiley & Sons, inc.