ANALISIS MULTIRESOLUSI DENGAN DEKOMPOSISI TRANSFORMASI WAVELET DISKRIT BERFILTER WAVELET HAAR

Nurul Khomariah[1], Dewi Retno Sari S.[2]
[1,2]Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Sebelas Maret Surakarta
nurulkhomariah21@student.uns.ac.id, dewiretnoss@staff.uns.ac.id

Abstrak

Analisis data dengan dimensi tinggi tidak mudah dilakukan bahkan dengan sistem komputer modern sekalipun. Salah satu pendekatan yang digunakan dengan melakukan reduksi dimensi salah satunya dengan wavelet. Wavelet merupakan fungsi transformasi yang secara otomatis memotong data ke dalam komponen berbeda dan memelajari masing-masing komponen dengan resolusi yang sesuai dengan skalanya. Transformasi wavelet diskret (TWD) merupakan salah satu teknik reduksi dimensi dengan teknik dekomposisi multiresolusi untuk mengatasi masalah pemodelan yang menghasilkan sinyal representasi lokal pada domain waktu dan domain frekuensi. Dekomposisi multiresolusi memisahkan tren dari time series. Transformasi ini dapat mengubah data asli ke domain wavelet untuk dianalisis dan dapat mengurai sinyal-sinyal baik pada frekuensi rendah maupun frekuensi tinggi dengan lebih tepat. Pada penelitian ini, dilakukan kajian ulang TWD. Tiga hal penting dalam melakukan transformasi wavelet diskrit terdiri atas menentukan jumlah level multireoslusi, menentukan wavelet apa yang akan digunakan, dan menentukan aturan batasan. Transformasi wavelet diskret menggunakan filter wavelet untuk membagi data ke frekuensi yang berbeda atau komponen skala, dan selanjutnya menganalisis masing-masing komponen dengan suatu resolusi yang sesuai dengan skalanya. Dalam hal ini digunakan wavelet Haar. Hasil dari penelitian ini adalah TWD dengan komponen skala.

Kata Kunci: *dekomposisi; multiresolusi*; *transformasi wavelet; wavelet Haar*

1. PENDAHULUAN

Pada data nyata yang ditemui sehari hari, membentuk pola abstrak yang tidak selalu dapat didekati dengan fungsi sinus dan cosinus melalui deret Fourier. Oleh karena itu, para ilmuan mengembangkan suatu metode yang dapat merekonstruksi sinyal atau fungsi berpola abstrak sehingga menghasilkan sinyal dengan representasi lokal pada domain waktu dan frekuensi. Kata *wavelet* mungkin agak asing di telinga banyak orang karena *wavelet* merupakan metode baru sebagai pembaruan dari metode Fourier. *Wavelet* berasal dari bahasa Perancis *ondelete* yang berarti gelombang kecil. Istilah *wavelet* dalam pemodelan matematika mengandung arti fungsi dasar yang dapat melakukan rekonstruksi sinyal. Deret Fourier dapat merekonstruksi sinyal dalam bentuk fungsi sinus dan cosinus. Sebagai fungsi pembangun, *wavelet* mampu merekonstruksi sinyal mulus dan tak mulus termasuk sinyal dengan lompatan atau titik runcing. Rekonstruksi sinyal tak mulus tidak dapat didekati dengan baik menggunakan deret Fourier (Ogden, 1997).

Sebelum dikembangkan *wavelet*, para ilmuan menggunakan deret dan transformasi Fourier untuk menganalisis sinyal atau fungsi pada data. Karena tuntutan dunia terapan antara lain penganalisaan gelombang bunyi, elektromagnetik dan lain-lain yang umumnya bukan gelombang periodik sederhana tetapi gelombang-gelombang lokal sehingga tidak mudah apabila didekati dengan deret Fourier dan akan membutuhkan banyak koefisien Fourier sehingga tidak efektif (Suparti, 2005).

Wavelet mempunyai beberapa keunggulan dibandingkan dengan metode yang lainnya. Pertama, yaitu *wavelet* terlokalisasi dalam waktu dan merupakan fungsi pembangun yang baik untuk beberapa jenis fungsi termasuk fungsi yang berubah setiap waktu, sinyal berfluktuasi tinggi, dan beberapa fungsi tidak mulus lainnya. Kedua, *wavelet* dapat memisahkan fungsi dalam komponen multiresolusi. Penangkapan resolusi halus dan tak halus dibedakan sesuai dengan skala dan fitur masing-masing. Ketiga, pendekatan *wavelet* dapat memadatkan energi sinyal menjadi lebih kecil melalui fungsi *wavelet*. Hal tersebut dikenal sebagai kompresi data yang dapat digunakan untuk aplikasi seperti estimasi statistik nonparametrik dan klasifikasi (Bruce dan Gao, 1996).

Pada penelitian ini, penulis mengkaji ulang multiresolusi dengan dekomposisi transformasi *wavelet* diskret berfilter *wavelet* Haar. *Discrete wavelete transform* (DWT) menggunakan filter *wavelet* Haar untuk membagi data ke dalam frekuensi yang berbeda atau komponen-komponen skala, dan selanjutnya menganalisis masing-masing komponen dengan suatu resolusi yang sesuai dengan skalanya (Hayati dan Kurnia, 2014). Dengan demikian dengan adanya kajian ulang ini diharapkan menambah pengetahuan bagi pembaca dan membuat ketertarikan bagi pembaca agar membuat penelitian lebih mendalam tentang metode *wavelet* ini.

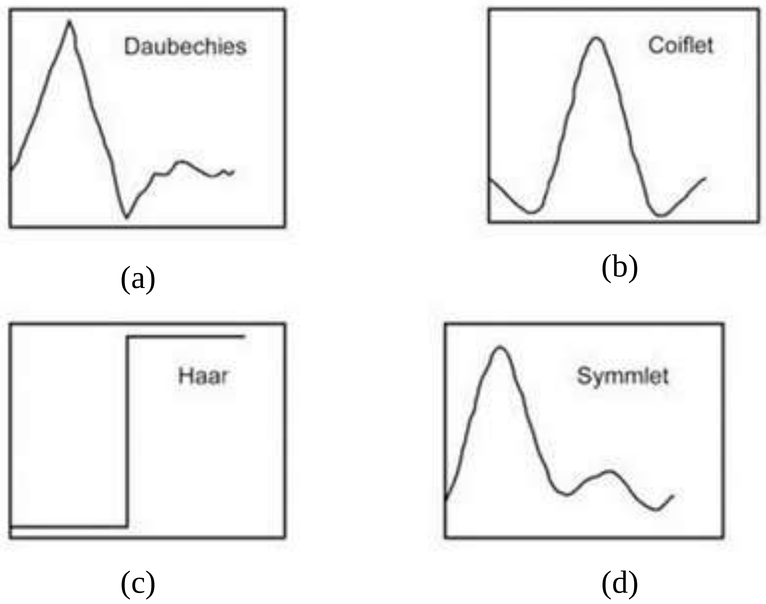
2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis yang dilakukan dengan menganalisis beberapa literatur terkait seperti fungsi wavelet, transformasi wavelet, analisis multiresolusi, dekomposisi transformasi wavelet diskrit, dan keluarga wavelet Haar. Prosedur yang dilakukan pada penelitian ini adalah: 1) melakukan studi teoritis dari beberapa meteri terkait, 2) meneliti hasil studi teoritis dan menganalis fungsi wavelet, analisis multiresolusi, transformasi wavelet diskrit, 3) melakukan kesimpulan.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

3.1 Fungsi Wavelet

Wavelet merupakan fungsi pembangun yang sangat penting, analog dengan fungsi trigonometri sinus dan cosinus fungsi *wavelet* berosilasi di sekitar nol. Meskipun begitu, osilasi dari *wavelet* lebih mendekati nol dan fungsi tersebut dapat dilokalisasi dalam dimensi waktu dan ruang. Menurut Parcival dan Walden (2000), pada umumnya, *wavelet* adalah fungsi yang memiliki karakteristik jika diintegralkan (-∞, ∞) hasilnya nol dan integral fungsi kuadratnya sama dengan satu dengan definisi ψ merupakan fungsi mother *wavelet*. Contoh mother *wavelet* yaitu seperti pada gambar berikut.



Gambar 2. (a) mother *wavelet* Daubechies, (b) mother *wavelet* Coiflet, (c) mother *wavelet* Haar, (d) mother *wavelet* Symmlet

a. Nilai integral dari $\psi(.)$ sama dengan nol :
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\ du = 0$$
b. Nilai integral dari $\psi(.)$ kuadrat sama dengan satu
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2\ du = 1$$

Fungsi *wavelet* pertama kali diperkenalkan oleh Haar, yang dibedakan menjadi dua jenis *wavelet* yaitu fungsi father *wavelet* ($\emptyset$) dan fungsi mother *wavelet* (ψ) yang memiliki sifat $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\ du = 1$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\ du = 0$, dengan dilatasi dan translasi integer, *father wavelet* dan *mother wavelet* menghasilkan keluarga *wavelet* lainnya yaitu $\phi_{j,k}(x) = (p2^J)^{\frac{1}{2}}\,\phi(p2^J x - k)$ dan $\psi_{j,k}(x) = (p2^J)^{\frac{1}{2}}\,\psi(p2^J x - k)$ untuk p > 0, dan jika p=1 maka diperoleh $\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{J}{2}}\,\phi(2^J x - k)$ dan $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{J}{2}}\,\psi(2^J x - k)$. Fungsi father *wavelet* ($\emptyset$) baik digunakan untuk merepresentasikan sinyal halus berfrekuensi rendah dan fungsi mother *wavelet* (ψ) baik digunakan untuk merepresentasikan detail dan fungsi berfrekuensi tinggi. *Father wavelet* dan mother *wavelet* membentuk suatu keluarga *wavelet*. Ada banyak keluarga *wavelet* yang berbeda, untuk keluarga *wavelet* ortogonal yaitu Haar, Daublets, Symmlets, dan Coiflets. Dalam penelitian ini dibatasi hanya pada *wavelet* berfilter Haar. W*avelet* Haar memiliki fungsi sebagai berikut

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -1,\ \frac{1}{2} \le t \le 1 \\ 0, t\ yang\ lain \end{cases} \text{ dan } \phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1, \\ 0, & t\ yang\ lain \end{cases}$$

3.2 Transformasi *Wavelet*

Transformasi sinyal merupakan bentuk lain dari penggambaran sinyal yang tidak mengubah isi informasi dari sinyal tersebut. Transformasi ini juga dapat digunakan untuk kompresi data. Transformasi *wavelet* mempunyai dua seri dalam pengembangannya yaitu *discrete wavelet transform* (*DWT*) dan *continous wavelet transform* (*CWT*). Semua fungsi dalam *discrete wavelet transform* (*DWT*) dan *continous wavelet transform* (*CWT*) diturunkan dari mother *wavelet* melalui translasi/pergerseran dan penskalaan/kompresi. Pada penskalaan dan fungsi *wavelet*, sinyal atau fungsi dapat diperluas dalam bentuk

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k)\phi_k(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} d_j(t)\,\psi_{j,k}(t)$$

dengan fungsi skala dan koefisien *wavelet* $c(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k{}^*(t) f(t) dt$ dan $d_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}{}^*(t) f(t) dt.$

Terdapat dua jenis *wavelet* yang merekonstruksi fungsi, maka terdapat dua filter pembangun DWT yaitu filter *mother wavelet* dan filter *father wavelet*. *Mothe*r *wavelet* biasa dinotasikan dengan *h* dan *father wavelet* biasa dinotasikan dengan *g*. Maka dalam menentukan nilai filter memiliki beberapa sifat berikut,

a. Panjang filter genap
b. $\sum_{i=0}^{L-1} h_i{}^2 = 1$ dan $\sum_{i=0}^{L-1} g_i{}^2 = 1$ dengan L panjang filter
c. $\sum_{i=0}^{L-1} h_i g_i = 0$
d. gl = $(-1)^{l+1} h_{L-1}$

3.3 Analisis Multiresolusi

Fungsi $C_J(t) = \sum_k c_{J,k}\,\phi_{J,k}(t)$ dan $D_J(t) = \sum_k d_{J,k}\,\psi_{J,k}(t)$ masing-masing disebut sebagai sinyal halus dan sinyal detail. Pendekatan deret *wavelet* ortogonal dalam sinyal kontinu $f(t)$dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$f(t) = C_J(t) + D_J(t) + D_{J-1}(t) + \cdots + D_1(t).$$

Penjumlahan pendekatan dalam fungsi tersebut merupakan dekomposisi dari sinyal ke dalam komponen sinyal ortogonal $C_J(t), D_J(t), D_{J-1}(t), \ldots, D_1(t)$ dalam skala yang berbeda, karena fungsi di skala yang berbeda merepresentasikan komponen dari sinyal $f(t)$ di resolusi yang berbeda pula. Pendekatan ini disebut sebagai dekomposisi multresolusi. Analisis sinyal dengan *wavelet* dapat dibagi menjadi tiga hal penting yaitu jumlah level multiresolusi, keluarga *wavelet*, dan batas aturan perbaikan.

Jumlah level multiresolusi dalam analisis *wavelet* dapat mencapai n level. Jumlah level maksimum bergantung pada jumlah data, batas, dan tipe *wavelet* (jumlah koefisien di level sinyal tak halus panjangnya setidaknya setengah dari filter *wavelet*). Tidak ada aturan yang cepat dalam menentukan *wavelet* yang digunakan untuk analisis. Alasan utama dalam menentukan *wavelet* tertentu adalah disesuaikan dengan karakteristik dari sinyal yang akan dianalisis. Ada banyak faktor yang dapat diperhitungkan dalam memilih *wavelet* yang sesuai dengan fungsi. Dua faktor penting dari banyaknya faktor tersebut adalah *smoothing function* dan lokalisasi spasial dari *wavelet*. Secara umum, *wavelet* dengan *support* yang lebih luas akan lebih halus tetapi kurang terlokalisasi. Selanjutnya, terdapat tujuh tipe aturan dalam menentukan aturan yang menjadi batas *wavelet* yaitu periodik, refleksi, nol, *poly*0, *poly*1, *poly*2, interval, dan tak berhingga. Standar dalam menentukan aturan batasan yang digunakan dalam *wavelet* yaitu

a. periodik, untuk ukuran sampel dapat habis dibagi 2^J dimana J merupakan jumlah level maksimal,
b. nol, jika jumlah sampel tidak habis dibagi 2^J ketika menggunakan *wavelet* ortogonal,
c. refleksi, , jika jumlah sampel tidak habis dibagi 2^J ketika menggunakan *wavelet* biortogonal.

Aturan menggunakan periodik dan refleksi keduanya merupakan tercepat dan paling stabil secara numerik dalam transformasi dan transformasi invers.

3.4 Transformasi *Wavelet* Diskrit

Discrete Wavelet Transform (*DWT*) menghitung koefisien dari pendekatan deret *wavelet* pada fungsi diskrit $f_1, f_2, \ldots, f_n$. DWT memetakan vektor $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)'$ ke vektor koefisien *wavelet* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)'$. Vektor **w** mengandung koefisien $c_{J,k}$ dan $d_{J,k}$, $j = 1,2, \ldots, J$ dari pendektaan deret *wavelet*. $c_{J,k}$ disebut sebagai koefisien halus yang merepresentasikan perilaku halus dari data pada skala tak halus 2^J. $d_{J,k}$ disebut koefisien detail yang memberikan deviasi pada skala tak halus dari perilaku halusnya. Koefisien detail $d_{J-1,k}, d_{J-2,k}, \ldots, d_{1,k}$ merepresentasikan deviasi skala semakin halus dari perilaku halus tersebut. Koefisien *wavelet* diperoleh dari skala halus dan skala tak halus di vektor **w**. Dalam kasus dimana n habis dibagi 2^J,

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} c_J \\ d_J \\ \vdots \\ d_1 \end{pmatrix}$$

Dengan $c_J = (c_{J,1}, c_{J,2}, \cdots, c_{J,\frac{n}{2^J}})'$; $d_J = (d_{J,1}, d_{J,2}, \cdots, d_{J,\frac{n}{2^J}})'$; $d_{J-1} = (d_{J-1,1}, d_{J-1,2}, \cdots, d_{J-1,\frac{n}{2^{J-1}}})'$; $d_1 = (d_{1,1}, d_{1,2}, \cdots, d_{1,\frac{n}{2}})'$.

Koefisien DWT didefinisikan sebagai

$$W_f(j,k) = < f(t), \psi_{j,k} > = \int_R \psi_{j,k}{}^*(t) f(t) dt$$

dengan $f(t)$ adalah siyal dalam domain waktu, $\psi_{j,k}$ adalaah *wavelet*, dan * menyatakan konjugasi kompleks. Ketika sinyal $f(t)$ dilewatkan melalui satu set filter yang ditentukan oleh suatu keluarga *wavelet*, dapat diperoleh *output* yaitu koefisien *wavelet*. Koefisien-koefisien tersebut menggambarkan sinyal dalam domain skala waktu. Pada transformasi *wavelet two-channel* sinyal diskrit dipisahkan dalam komponen *low-pass* dan *high-pass*, *h(k)* adalah *low-pass filter* sebagai *scaling filter* dan *g(k)* adalah *high-pass filter* sebagai *wavelet filter* melalui proses dekomposisi. Dekomposisi merupakan proses memecah sinyal menjadi beberapa komponen dengan resolusi lebih rendah.

Koefisien filter *low-pass* l_n untuk transformasi *wavelet* diskrit ortogonal ditentukan dengan *father wavelet* melalui rumus $l_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \phi(t)\phi(2t-n)dt$. Koefisien filter *high-pass* h_n ditentukan dengan perkalian dalam dari *father* dan *mother wavelet* melalui rumus $h_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \psi(t)\phi(2t-n)dt$. Koefisien filter *high-pass* dan *low-pass* mempunyai hubungan secara langsung oleh hubungan filter *quadrature mirror* yaitu $h_n = (-1)^n l_{1-n}$.

Transformasi *wavelet* diskrit menggunakan algoritma piramid bertingkat dengan setiap iterasi membagi data menjadi dua, dengan cara sebagai berikut,

a. Panjang vektor data, *L*, harus *dyadic* atau dua pangkat bilangan bulat (2^j). Jika data yang dimiliki tidak *dyadic*, maka dapat ditambahkan nilai nol pada vektor data tersebut. Contoh vektor data [3 2 4 7 6] dengan panjang 5, maka vektor tersebut dapat ditambahkan nol menjadi [3 2 4 7 6 0 0 0] yang memiliki panjang *L* = 8.
b. Setiap transformasi pada dasarnya mengaplikasikan dua fungsi, yaitu menghaluskan data (seperti penjumlahan atau rata-rata berbobot) dan menemukan perbedaan berbobot (melihat fitur data secara detail).
c. Kedua fungsi tersebut diaplikasikan terhadap pasangan titik data dalam vektor X, yaitu (x_{2i}, x_{2i+1}) sehingga menghasilkan dua himpunan data dengan panjang L/2 yang menyatakan data masukan berfrekuensi rendah (data yang dihaluskan) dan berfrekuensi tinggi.

d. Kedua fungsi tersebut diaplikasikan secara rekursif terhadap himpunan data yang dihasilkan oleh pengulangan sebelumnya hingga menghasilkan himpunan data dengan panjang L=2.
e. Nilai-nilai dari himpunan data yang dihasilkan dari iterasi sebelumya disebut sebagai koefisien wavelet dari data yang ditrasnformasikan.

Contoh terdapat *f(t)* sebagai titik data yaitu a_1, a_2, a_3, a_4, sehingga terdapat 2^2 data. Karenanya j=2 maka level dekomposisi yang mungkin adalah 2. Penggunaan *wavelet* Haar, $h(n)$ dan $\tilde{h}(n)$ diberikan masing-masing $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ dan $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}]$. Setelah menerapkan koefisien filter *low-pass* dan *high-pass* maka didapatkan $[\frac{a_0+a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_2+a_3}{\sqrt{2}}]$ dan $[\frac{a_1-a_0}{\sqrt{2}}, \frac{a_3-a_2}{\sqrt{2}}]$. Masing-masing disebut sebagai filter *low-pass* dan *high-pass* level 1. Pada dekomposisi level 2 sedikit berbeda, ketika prosedur sebelumnya digunakan pada koefisien low-pass pertama, maka untuk level 2 yaitu $\frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{a_0+a_1}{\sqrt{2}} + \frac{a_2+a_3}{\sqrt{2}}]$ dan $\frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{a_3+a_2}{\sqrt{2}} - \frac{a_1+a_0}{\sqrt{2}}]$. Sekarang tingkat dekomposisi mencapai maksimum yang mungkin yaitu dua telah ditentukan, dengan mendapatkan koefisien *low-pass* tunggal. Koefisien *low-pass* adalah rata-rata semua titik data dan koefisien *high-pass* level-2 tunggal adalah perbedaan dari rata-rata terdekat.

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh kesimpulan bahwa terdapat tiga hal penting dalam analisis sinyal dengan multiresolusi menggunakan metode transformasi *wavelet* diskrit yaitu menentukan jumlah level multireoslusi, menentukan *wavelet* apa yang akan digunakan, dan menentukan aturan batasan. Transformasi wavelet dapat mengurai sinyal-sinyal baik pada frekuensi tinggi maupun rendah dengan lebih tepat.

5. DAFTAR PUSTAKA

Bruce, A. & Gao,H.Y.(1996). Applied Wavelet *Analysis with S-PLUS with 192 Illustration.* New York. NJ: Springer-Verlag.

Caraka, R.E, *Treshold (DWT) Wavelet Decomposition Object*. www.researhgate.com.

Hayati, R. & Kurnia, R.. (2014). Simulasi Unjuk Kerja *Discrete Wavelet Transform* (DWT) dan *Discrete Cosine Transform* (DCT) untuk Pengolahan Sinyal Radar di Daerah yang Ber-Noise Tinggi. Diakses di http://jnte.ft.unand.ac.id/index.php/jnte/article/view/53/50

Kusumaningum, D.A., Suparti, Maruddani, D.A.I. (2017). Analisis Data Runtun Waktu Menggunakan Metode *Wavelet Thresholding* dengan *Maximal Overlap Discrete Transform*. Jurnal Gaussian 151-159.

Modi, K.J, Nanavati, S.P., Phadke, A.S., & Panigrahi, P.K. (20014). *Wavelet Transform: Application to Data Analysis-I*. General Article 10-22.

Ogden, R.T.. (1997). *Essential Wavelets For Statistical Application And Data Analysis*. Boston : Birkhauser.

Ratna, D., Khukmiati, H. (2004). Penerapan Transformasi *Wavelet* Diskrit untuk Reduksi *Noise* Pada Citra Digital. J.of Math and Its Appl 49-57.

Suparti. (2005). Perbandingan Estimator Regresi Nonparametrik Menggunakan Metode Fourier dan Metode *Wavelet*. UNDIP: Jurnal Matematika.

Suyanto. (2019). Data Mining untuk Klasifikasi dan Klasterisasi Data. Bandung. NJ: Informatika Bandung.

Yasin, H. (2009). Estimasi Regresi Non Parametrik dengan Metode Wavelet Shrinkage Neural Network pada Model Rancangan Tetap. Diakses di https://www.researchgate.net/publication/298429993 1-10