GRAF ANNIHILATOR DARI RING KOMUTATIF

Muhammad Rofi' Ashidiqi, Vika Yugi Kurniawan, Putranto Hadi Utomo
Program Studi Matematika FMIPA UNS Surakarta
m.rofi96@gmail.com, vikayugi@staff.uns.ac.id, putranto@staff.uns.ac.id

Abstrak

Diketahui R adalah ring komutatif dengan elemen identitas tak nol. Graf annihilator dari R dinotasikan dengan $AG(R)$ merupakan graf tidak berarah dengan himpunan vertex-nya adalah seluruh elemen pembagi nol sejati dari R, dinotasikan dengan $Z(R)^* = Z(R)\backslash\{0\}$. Dua vertex berbeda $x, y \in Z(R)^*$ saling adjacent jika dan hanya jika $ann_R(xy) \neq ann_R(x) \cup ann_R(y)$ dimana $ann_R(a) = \{r \in R | ra = 0\}$. Graf pembagi nol dari R yang dinotasikan dengan $\Gamma(R)$ merupakan suatu graf dengan himpunan vertex-nya adalah himpunan pembagi nol sejati dan dua vertex berbeda $x, y \in Z(R)^*$ saling adjacent jika dan hanya jika $xy = 0$. Penelitian ini bertujuan mengkaji sifat-sifat graf annihilator dari ring komutatif. Metode penelitian yang digunakan dalam makalah ini adalah studi literatur mengenai graf dan struktur aljabar. Dari hasil penelitian yang sudah dilakukan, diperoleh bahwa setiap edge di graf $\Gamma(R)$ juga merupakan edge di graf $AG(R)$, graf $AG(R)$ merupakan graf terhubung dengan diameter paling besar dua, dan girth dari graf $AG(R)$ paling besar empat apabila terdapat cycle. Selain itu, jika ring R tereduksi maka $AG(R) = \Gamma(R)$ jika dan hanya jika memiliki tepat dua ideal prima minimal.

Kata Kunci: *Graf Pembagi Nol; Graf Annihilator; graf terhubung; ideal prima.*

1. PENDAHULUAN

Graf adalah diagram yang terdiri dari *vertex* dan *edge* yang menghubungkan suatu *vertex* dengan *vertex* lainnya. Graf pembagi nol dari ring komutatif yang dinotasikan dengan $\Gamma(R)$ adalah suatu graf dengan *vertex-vertex*-nya adalah semua elemen dari R dan dua *vertex* terhubung jika perkalian *vertex* keduanya adalah nol. Gagasan ini diperkenalkan pertama kali oleh Beck (1986) mengenai pewarnaan dalam ring komutatif dimana semua elemen dari R sebagai *vertex*-nya. Kemudian pada tahun 1993, Anderson dan Naseer (1993) mengembangkan gagasan Beck dengan mendefinisikan suatu graf pembagi nol merupakan graf dengan himpunan *vertex*-nya adalah semua elemen dari ring R dan dua *vertex* berbeda x dan y saling *adjacent* oleh suatu *edge* jika dan hanya jika $xy = 0$. Selanjutnya pada tahun 1999, Anderson dan Livingston (1999) mendenisikan ulang graf pembagi nol $\Gamma(R)$ untuk setiap elemen dari ring R, *vertex-vertex*-nya merupakan pembagi nol sejati $Z(R)^*$, dan dua *vertex* yang berbeda x dan y *adjacent* jika dan hanya jika $xy = 0$.

Pada tahun 2014, Badawi (2014) memperkenalkan graf annihilator yang merupakan pengembangan graf pembagi nol dengan mengubah syarat *adjacent*-nya dimana dua *vertex* berbeda x dan y saling *adjacent* jika dan hanya jika $ann_R(xy) \neq ann_R(x) \cup ann_R(y)$. Pada makalah ini akan dikaji sifat-sifat graf annihilator $AG(R)$ dalam Badawi (2014), serta menambahkan beberapa sifat yang belum ada.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan menggunakan referensi berupa buku, jurnal, atau tulisan mengenai graf dan struktur aljabar, khususnya graf annihilator pada ring komutatif.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

3.1. Teori Graf

Menurut Chartand, *dkk* (2016), Suatu graf G adalah himpunan tak kosong berhingga $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang disebut *vertex* dan himpunan yang mungkin kosong $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ merupakan himpunan pasangan tidak berurutan dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut *edge*.

Jarak dua *vertex* x dan y dari suatu graf dinotasikan $d(x, y)$ adalah panjang dari *path* terpendek yang menghubungkan *vertex* x dan y. Diameter dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $diam(G)$ adalah jarak terpanjang dari *path* terpendek yang menghubungkan setiap *vertex* dari graf G. *Girth* dari suatu graf G dinotasikan $gr(G)$ adalah penjang *cycle* terpendek dari graf G.

Menurut Visweswaran dan Sarman (2017), suatu graf G dikatakan *complemented* jika untuk setiap *vertex* x di G, terdapat *vertex* y dimana x dan y *adjacent* dan tidak ada *vertex* lain yang *adjacent* terhadap *vertex* x dan y.

Menurut Dutta dan Lanong (2017), graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap *vertex*-nya terhubung ke setiap *vertex* yang lain. Graf lengkap dengan n buah *vertex* dinotasikan dengan K^n. Jika himpunan *vertex* dari graf G dapat dibagi menjadi dua buah himpunan A dan B yang tak beririsan sehingga setiap *edge* G terhubung ke sebuah *vertex* dalam himpunan A dan sebuah *vertex* dalam himpunan B, maka G disebut graf bipartite. Graf bipartite lengkap adalah graf bipartite dimana setiap *vertex* dalam A terhubung ke setiap *vertex* dalam B dengan tepat satu *edge*. Graf bipartite lengkap dinotasikan dengan $K^{s,t}$ dengan $s = |A|$ dan $t = |B|$. Graf bintang yang dinotasikan dengan $K^{1,n}$ adalah sautu graf dimana terdapat satu *vertex* terhubung dengan setiap *vertex* lainnya, sedangkan *vertex* yang lain hanya terhubung dengan *vertex* tersebut.

Berikut diberikan teorema-teorema berkaitan dengan *girth* pada graf lengkap, graf bipartite lengkap, dan graf bintang.

Teorema 3.1.1. Diketahui G adalah graf lengkap dengan n *vertex*, maka $gr(G) = gr(K^n) = 3$ untuk $n \geq 3$.

Teorema 3.1.2. Diketahui G adalah graf bipartite lengkap dengan $s + t$ *vertex*, maka $gr(G) = gr(K^{s,t}) = 4$ untuk $2 \leq s \leq t$.

Teorema 3.1.3. Diketahui G adalah graf bintang dengan $n + 1$ *vertex*, maka $gr(G) = gr(K^{1,n}) = \infty$ untuk $n \geq 1$.

3.2. Graf Annihilator dari Ring Komutatif

Pada bagian ini, akan dijelaskan sifat-sifat graf annihilator dari ring komutatif, yaitu diameter dan *girth* dari suatu graf annihilator $AG(R)$ serta keterkaitan dengan graf pembagi nol $\Gamma(R)$. Ideal prima minimal dari suatu ring R dinotasikan dengan $Min(R)$, himpunan elemen nilpotent dinotasikan dengan $Nil(R)$, dan ring kuosien total dinotasikan dengan $T(R)$.

Pertama, akan dibuktikan bahwa setiap *edge* di $\Gamma(R)$ juga merupakan *edge* di $AG(R)$, berakibat setiap *path* di $\Gamma(R)$ juga merupakan *path* di $AG(R)$.

Teorema 3.2.1. *Jika $x-y$ adalah edge dari $\Gamma(R)$ untuk $x,y \in Z(R)^*$ yang berbeda, maka $x-y$ adalah edge dari $AG(R)$.*

Bukti:

Misalkan $x-y$ adalah *edge* dari $\Gamma(R)$ untuk beberapa $x,y \in Z(R)^*$ yang berbeda sedemikian sehingga $xy=0$ dan berakibat $ann_R(xy)=R$. Karena $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ sehingga $ann_R(x) \neq R$ dan $ann_R(y) \neq R$, berakibat $ann_R(x) \cup ann_R(y) \neq R$. Jadi $x-y$ adalah *edge* $AG(R)$. ■

Anderson dan Livingston (1999) mengatakan bahwa $diam(\Gamma(R)) = \{0,1,2,3\}$, selanjutkan akan dibuktikan bahwa graf $AG(R)$ memiliki diameter paling besar dua.

Teorema 3.2.2. *Jika R adalah ring komutatif dengan $|Z(R)^*| \geq 2$, maka graf $AG(R)$ terhubung dengan $diam(AG(R)) \leq 2$.*

Bukti:

Ambil $x,y \in Z(R)^*$. Asumsikan $x-y$ bukan *edge* dari graf $AG(R)$ dengan panjang $d(x,y) > 2$. Karena $d(x,y) > 2$, maka $ann_R(x) \nsubseteq ann_R(y)$ dan $ann_R(y) \nsubseteq ann_R(x)$. Hal ini berakibat $ann_R(xy) \neq ann_R(x) \cup ann_R(y)$ sehingga $x-y$ adalah *edge* $AG(R)$, terjadi kontradiksi. Jadi graf $AG(R)$ terhubung dengan $diam(AG(R)) \leq 2$. ■

Selanjutnya akan dibuktikan jika R adalah ring komutatif tereduksi dengan terdapat *edge* di $AG(R)$ yang bukan merupakan *edge* di $\Gamma(R)$ maka terdapat *cycle* di $AG(R)$ dimana setiap *edge*-nya bukan merupakan *edge* di $\Gamma(R)$.

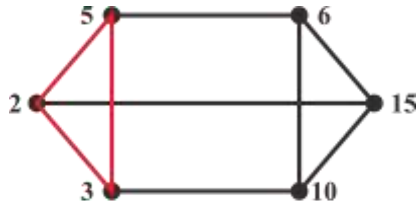
Teorema 3.2.3. *Jika R adalah ring komutatif tereduksi dan terdapat edge $x-y$ dari $AG(R)$ yang bukan edge dari $\Gamma(R)$ dimana $x,y \in Z(R)^*$ yang berbeda, maka terdapat $w \in ann_R(xy) \backslash \{x,y\}$, sedemikian sehingga $x-w-y$ adalah path di $AG(R)$ yang bukan path di $\Gamma(R)$, dan oleh karenanya $C: x-w-y-x$ adalah cycle dalam AG(R) dengan panjang tiga dan setiap edge dari C bukan edge di $\Gamma(R)$.*

Bukti:

Misalkan $x-y$ adalah *edge* dari $AG(R)$ yang bukan *edge* dari $\Gamma(R)$ untuk $x,y \in Z(R)^*$ yang berbeda. Karena R tereduksi, didapatkan $(xy)^2 \neq 0$. Sehingga $xy^2 \neq 0$ dan $x^2y \neq 0$, maka terdapat $w \in ann_R(xy) \backslash (ann_R(x) \cup ann_R(y) \cup \{x,y\})$ sehingga $x-w-y$ adalah *path* di $AG(R)$ yang bukan *path* di $\Gamma(R)$, dan karenanya $C: x - w - y - x$ adalah *cycle* dalam $AG(R)$ dengan panjang tiga dan setiap *edge* dari C bukan *edge di* $\Gamma(R)$. ■

Dibawah ini, akan diberikan contoh ring komutatif tereduksi dengan terdapat *cycle* di $AG(R)$ namun bukan *cycle* di $\Gamma(R)$.

Contoh 3.2.1. Diberikan ring $R = \mathbb{Z}_{30}$. $\overline{2} - \overline{3}$ merupakan *edge* dari $AG(R)$ yang bukan *edge* dari $\Gamma(R)$. Terdapat $5 \in ann_R(6) \backslash \{2,3\}$, sehingga $2 - 5 - 3$ adalah *path* di $AG(R)$ yang bukan *path* di $\Gamma(R)$, dan karenanya $C: 2 - 5 - 3 - 2$ adalah *cycle* dalam $AG(R)$ dengan panjang tiga dan setiap *edge* dalam C bukan *edge* di $\Gamma(R)$, ditunjukkan pada Gambar 3.2.1.



Gambar 3.2.1. Graf $AG(\mathbb{Z}_{30})$

Menurut Badawi (2014), diketahui R adalah ring komutatif tereduksi dengan $|Min(R)| \geq 2$. Jika $Z(R)$ adalah sebuah ideal dari R maka himpunan $Min(R)$ harus tak terbatas dimana $Z(R) = \cup \{Q | Q \in Min(R)$.

Selanjutnya, akan diberikan beberapa sifat graf $AG(R)$ dari ring komutatif tereduksi yang ditunjukkan pada teorema 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7.

Teorema 3.2.4. *Diketahui R adalah ring komutatif tereduksi yang bukan merupakan daerah integral dan Z(R) adalah sebuah ideal dari R, maka* $AG(R) \neq \Gamma(R)$ *dan gr(AG(R)) = 3.*

Bukti:

Diberikan $z \in Z(R)^*$, $c \in ann_R(z) \backslash \{0\}$, dan $m \in ann_R(c+z) \backslash \{0\}$ sehingga $m \in ann_R(c+z) \subset ann_R(z)$ berakibat $mc = 0$. Ring R tereduksi sehingga $c^2 \neq 0$ didapatkan $m \neq c$, dan karenanya $c + z \neq m + z$. Karena $\{c, m\} \subseteq ann_R(z)$ dan $z^2 \neq 0$ diperoleh $c + z$ dan $m + z$ adalah elemen $Z(R)^*$. Karena $(m+z)(c+z) = z^2 \neq 0$ sehingga $(c+z) - (m+z)$ bukan merupakan *edge* dari $\Gamma(R)$. Karena $c^2 \neq 0$ dan $m^2 \neq 0$, sehingga $(c+m) \in ann_R(z2) \backslash (ann_R(c+z) \cup ann_R(m+ z))$, dan dengan demikian $(c+z) - (m+z)$ adalah *edge* $AG(R)$. Karena $(c+z) - (m+z)$ adalah *edge* $AG(R)$ yang bukan *edge* dari $\Gamma(R)$, didapatkan $AG(R) \neq \Gamma(R)$. Karena R tereduksi dan $AG(R) \neq \Gamma(R)$ sehingga diperoleh gr(AG(R)) = 3 oleh Teorema 3.2.3. ■

Selanjutnya akan dibuktikan untuk R adalah ring komutatif tereduksi yang bukan daerah integral sehingga $AG(R) = \Gamma(R)$ jika dan hanya jika $|Min(R)| = 2$.

Teorema 3.2.5. *Jika R adalah ring komutatif tereduksi dan bukan merupakan daerah integral, maka $AG(R) = \Gamma(R)$ jika dan hanya jika $|Min(R)| = 2$.*

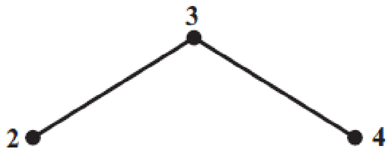
Bukti:

Diketahui $AG(R) = \Gamma(R)$ dengan R adalah ring komutatif tereduksi bukan domain integral, akan dibuktikan $|Min(R)| = 2$. Asumsikan $|Min(R)| \geq 3$. Misalkan $Z(R)$ merupakan ideal dari R sehingga $AG(R) \neq \Gamma(R)$ menurut teorema 3.2.4, terjadi kontradiksi sehingga $|Min(R)| = 2$. Selanjutnya misalkan $Z(R)$ bukan merupakan ideal dari R. Karena $|Min(R)| \geq 3$, didapatkan $diam(\Gamma(R)) = 3$ dan dengan demikian $AG(R) \neq \Gamma(R)$ oleh Teorema 3.2.2, terjadi kontradiksi sehingga $|Min(R)| = 2$.

Diketahui $|Min(R)| = 2$, akan dibuktikan $AG(R) = \Gamma(R)$. Misalkan P_1, P_2 menjadi ideal prima minimal R. Karena R tereduksi, diperoleh $Z(R) = P_1 \cup P_2$ dan $P_1 \cap P_2 = \{0\}$. Misalkan $a, b \in Z(R)^*$. Asumsikan $a, b \in P_1$. Karena $P_1 \cap P_2 = \{0\}$, maka $a \notin P_2$ atau $b \notin P_2$, dan dengan demikian $ab \neq 0$. Karena $P_1P_2 \subseteq P_1 \cap P_2 = \{0\}$, berarti $ann_R(ab) = ann_R(a) = ann_R(b) = P_2$. Jadi $a - b$ bukan *edge* di $AG(R)$. Demikian pula, jika $a, b \in P_2$, maka $a - b$ bukan merupakan *edge* di $AG(R)$. Jika $a \in P_1$ dan $b \in P_2$, lalu $ab = 0$, dan dengan demikian $a - b$ adalah *edge* $AG(R)$. Sehingga setiap *edge* $AG(R)$ adalah *edge* dari $\Gamma(R)$, dan karenanya $AG(R) = \Gamma(R)$. ■

Diberikan contoh ring komutatif tereduksi dengan $|Min(R)| = 2$ dan $AG(R) = \Gamma(R)$.

Contoh 3.2.2. Diberikan ring $R = \mathbb{Z}_6$. Sehingga $|Min(R)| = 2$ dan $AG(R) = \Gamma(R)$, ditunjukkan pada Gambar 3.2.2.



Gambar 3.2.2. Graf $AG(\mathbb{Z}_6)$

Teorema 3.2.6. *Diketahui R adalah ring komutatif tereduksi. Maka pernyataan berikut adalah setara:*

(1) $gr(AG(R)) = 4$

(2) Graf $AG(R) = \Gamma(R)$ dan $gr(\Gamma(R)) = 4$.

(3) T(R) adalah ring yang isomorfik dengan $K_1 \times K_2$, dimana setiap K_i adalah lapangan dengan $|K_i| \geq 3$.

(4) $|Min(R)| = 2$ dan setiap ideal prima minimal terdapat setidaknya tiga elemen berbeda.

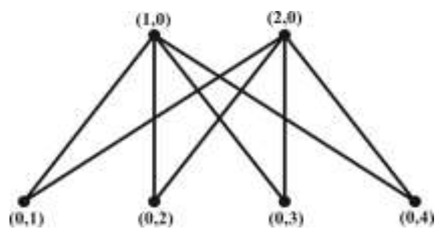
(5) Graf $AG(R) = K^{m.n}$ dengan $m, n \geq 2$.

Bukti:

(1) ⇒ (2). Diketahui ring R tereduksi dan $gr(AG(R)) = 4$ sehingga $AG(R) = \Gamma(R)$. Sedemikian juga berakibat $gr(\Gamma(R)) = 4$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Diketahui $gr(\Gamma(R)) = 4$ berakibat $\Gamma(R)$ merupakan *complemented*. Oleh karena itu $T = T(R)$ adalah von Neumann regular dan bukan lapangan. Karena T bukan merupakan idempotent trivial, maka $T = T_1 \times T_2$. Ambil $x, y \in T_1$ tak nol yang berbeda dan andaikan $xy = 0$, sehingga $(x, 0) - (y, 0) - (0,1) - (x, 0)$ merupakan *cycle* dengan *girth* tiga, terjadi kontradiksi. Sehingga T_1 merupakan lapangan, berlaku juga untuk T_2. Jadi $T = K_1 \times K_2$, dimana setiap K_i adalah lapangan dengan $|K_i| \geq 3$.
$(3) \Rightarrow (4)$. Diketahui $T(R) = K_1 \times K_2$, dimana setiap K_i adalah lapangan dengan $|K_i| \geq 3$, maka R memiliki tepat dua ideal prima minimal dengan setiap ideal prima minimal terdapat setidaknya tiga elemen berbeda.
$(4) \Rightarrow (5)$. Diketahui $|Min(R)| = 2$ sehingga $AG(R) = \Gamma(R)$ menurut Teorema 3.2.4. Berakibat $\Gamma(T) = \Gamma(R) = AG(R) = K^{m.n}$ dengan $m = |K_1| - 1$ dan $n = |K_2| - 1$.
$(5) \Rightarrow (1)$. Diketahui $AG(R)$ merupakan graf bipartite lengkap. Menurut teorema 3.1.2, maka $gr(AG(R)) = 4$. ■

Berikut diberikan contoh terkait teorema 3.2.6.
Contoh 3.2.3. Diberikan ring $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ dimana $\mathbb{Z}_3$ dan $\mathbb{Z}_5$ adalah lapangan. Maka $AG(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) = \Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) = K^{2.4}$ yang merupakan graf bipartite lengkap dengan $gr(AG(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) = 4$, ditunjukkan pada Gambar 3.2.3.



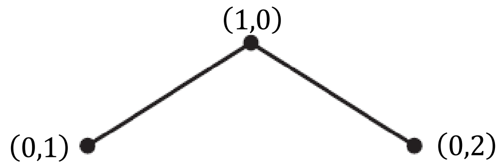
Gambar 3.2.3. Graf $AG(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$

Teorema 3.2.7. *Diketahui R adalah ring komutatif tereduksi yang bukan merupakan daerah integral. Maka pernyataan pernyataan berikut adalah setara:*
(1) $gr(AG(R)) = \infty$
(2) Graf $AG(R) = \Gamma(R)$ *dan* $gr(AG(R)) = \infty$.
(3) T(R) adalah ring yang isomorfik dengan $\mathbb{Z}_2 \times K$, *dimana* K *adalah lapangan.*
(4) $|Min(R)| = 2$ *dan setidaknya satu ideal prima minimal dari R memiliki tepat dua elemen yang berbeda.*
(5) Graf $AG(R) = K^{1.n}$ *dengan* $n \geq 1$.
Bukti:
$(1) \Rightarrow (2)$. Diketahui ring R tereduksi dan $gr(AG(R)) = \infty$ sehingga $AG(R) = \Gamma(R)$. Berakibat juga $gr(\Gamma(R)) = \infty$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Diketahui $gr(\Gamma(R)) = \infty$. Karena $|\Gamma(R)| \geq 2$ dan R tereduksi maka $\Gamma(R)$ merupakan *complemented*. Oleh karena itu $T = T(R)$ adalah von Neumann regular dan bukan lapangan. Karena T bukan merupakan idempotent trivial, maka $T = T_1 \times T_2$. Ambil $x, y \in T_1$ tak nol yang berbeda dan andaikan $xy = 0$, sehingga $(x, 0) - (y, 0) - (0,1) - (x, 0)$ merupakan *cycle* dengan *girth* tiga, terjadi kontradiksi. Sehingga T_1 merupakan lapangan, berlaku juga untuk T_2. Ambil $x, y \in T_1$ dan $w, z \in T_2$ tak nol yang berbeda, sehingga $(x, 0) - (0, w) - (y, 0) - (0, z) - (x, 0)$ merupakan *cycle* dengan *girth* empat, terjadi kontradiksi sehingga T_1 memiliki tepat satu elemen tak nol, berakibat T_1 isomorfis terhadap $\mathbb{Z}_2$. Jadi $\mathbb{Z}_2 \times K$, dimana K adalah lapangan.
$(3) \Rightarrow (4)$. Diketahui $T(R) = \mathbb{Z}_2 \times K$, dimana K adalah lapangan, maka R memiliki tepat dua ideal prima minimal dan setidaknya satu ideal prima minimal dari R memiliki tepat dua elemen yang berbeda.
$(4) \Rightarrow (5)$. Diketahui $|Min(R)| = 2$ sehingga $AG(R) = \Gamma(R)$ menurut Teorema 3.2.4. $|Min(R)| = 2$ dan setidaknya satu ideal prima minimal dari R memiliki tepat dua elemen yang berbeda, berakibat $\Gamma(T) = \Gamma(R) = AG(R) = K^{1.n}$ dengan $n = |K| - 1$.
$(5) \Rightarrow (1)$. Diketahui $AG(R)$ merupakan graf bintang. Menurut teorema 3.1.3, maka $gr(AG(R)) = \infty$. ■

Berikut diberikan contoh teorema 3.2.7.

Contoh 3.2.4. Diberikan ring $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dimana $\mathbb{Z}_3$ adalah lapangan. Maka $AG(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) = \Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) = K^{1.2}$ yang merupakan graf bintang dengan $gr(AG(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)) = \infty$, ditunjukkan pada Gambar 3.2.4.



Gambar 3.2.4. Graf $AG(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$

Selanjutnya, akan diberikan beberapa sifat graf $AG(R)$ dari ring komutatif tak tereduksi yang ditunjukkan pada teorema 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10, 3.2.11.

Teorema 3.2.8. *Jika ring R tak tereduksi dengan $Z(R) = Nil(R) \geq 4$ dan $Nil(R)^2 = \{0\}$, maka $AG(R) = \Gamma(R)$ dan $AG(R)$ adalah graf lengkap K^n dengan $n \geq 3$.*

Bukti:

Karena $Z(R) = Nil(R)$ dan $Nil(R)^2 = \{0\}$, maka $\Gamma(R)$ adalah graf lengkap K^n dengan $n = |\, Z(R)^*|$. Karena setiap *edge* dari $\Gamma(R)$ merupakan *edge* dari $AG(R)$ maka $AG(R) = \Gamma(R)$. Sedemikian sehingga $AG(R)$ adalah graf lengkap K^n dengan $n = |\, Z(R)^*|$. ■

Teorema 3.2.9. *Jika ring R tak tereduksi dengan $Z(R) = Nil(R)$ dan $Nil(R)^2 \neq \{0\}$, maka $AG(R) \neq \Gamma(R)$ dan $AG(R)$ adalah graf lengkap K^n dengan $n = |\, Z(R)^*|$.*

Bukti:

Karena $Z(R) \neq Nil(R)$ dan $Nil(R)^2 \neq \{0\}$, maka terdapat $x, y \in Z(R)^*$ dimana $xy \neq 0$. Ambil sembarang $x, y \in Z(R)^*$, Akan dibuktikan $ann_R(xy) \neq ann_R(x) \cup ann_R(y)$. Misalkan $xy = 0$ maka $x - y$ adalah *edge* dari $\Gamma(R)$ dan $AG(R)$, andaikan $xy \neq 0$ maka terdapat $w \in ann_R(xy) \backslash \{x, y\}$, berakibat $ann_R(xy) \neq ann_R(x) \cup ann_R(y)$. Sehingga $AG(R)$ adalah graf lengkap K^n dengan $n = |\, Z(R)^*|$ dan $AG(R) \neq \Gamma(R)$. ∎

Berikut diberikan contoh terkait teorema diatas.

Contoh 3.2.5. Diberikan ring $R = \mathbb{Z}_8$. Maka $Z(\mathbb{Z}_8) = Nil(\mathbb{Z}_8)$ dan $Nil(\mathbb{Z}_8)^2 \neq \{0\}$ dengan $Z(\mathbb{Z}_8)^* = \{2,4,6\}$. Karena terdapat *edge* $2 - 6$ di $AG(R)$ yang bukan *edge* $\Gamma(R)$ maka $AG(R) \neq \Gamma(R)$ dan $AG(R) = K^3$, ditunjukkan pada Gambar 3.2.5.

Gambar 3.2.5. Graf $AG(\mathbb{Z}_8)$

Dari teorema 3.2.9, didapatkan sifat sebagai berikut.

Teorema 3.2.10. *Jika R adalah ring komutatif tak tereduksi dan $Nil(R)^2 \neq \{0\}$, maka $AG(R) \neq \Gamma(R)$ dan $gr(AG(R)) = 3$.*

Bukti:

Menurut Teorema 3.2.9, karena $Nil(R)^2 \neq \{0\}$ maka $AG(R) \neq \Gamma(R)$. Dengan demikian $gr\big(AG(R)\big) = \{3,4\}$. Misalkan $F = \mathbb{Z}_2 \times B$ dimana B adalah $\mathbb{Z}_4$ atau $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. Karena $Nil(F)^2 = \{0\}$ dan $Nil(F) \neq \{0\}$ maka $gr(AG(R)) \neq 4$ menurut Teorema 3.2.5. Jadi $gr(AG(R)) = 3$. ∎

Teorema 3.2.11. *Diketahui ring R komutatif tak tereduksi. Maka berikut ini pernyataan setara:*

(1) $gr(AG(R)) = 4$.

(2) *Graf $AG(R) \neq \Gamma(R)$ dan $gr(AG(R)) = 4$.*

(3) *R adalah ring yang isomorfik dengan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ atau $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.*

(4) *Graf $AG(R) = K^{2,3}$.*

Bukti:

(1) ⇒ (2). Diketahui $gr(AG(R)) = 4$. Andaikan $AG(R) = \Gamma(R)$. Menurut Anderson dan Mulay (2007), maka R adalah ring isomorfik terhadap $D \times B$, dimana D adalah domain integral dengan $|D| \geq 3$ dan $B = \mathbb{Z}_4$ atau $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.

Asumsikan bahwa R adalah ring yang isomorfik dengan $D \times \mathbb{Z}_4$. Karena $|D| \geq 3$, terdapat $a \in D\backslash\{0,1\}$. Misalkan $x = (0,1), y = (1,2), w = (a, 2) \in R$. Maka x, y, w adalah elemen berbeda dalam $Z(R)^*$, $w(xy) = (0,0)$, $wx \neq (0,0)$, dan $wy \neq (0,0)$. Jadi $x - w - y - x$ adalah *cycle* dengan panjang tiga dalam $AG(R)$, terjadi kontradiksi. Demikian sehingga, asumsikan bahwa R adalah ring-isomorfik terhadap $D \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. Selanjutnya, karena $|D| \geq 3$, terdapat $a \in D\backslash\{0,1\}$. Misalkan $x = X + (X^2) \in \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. Kemudian mudah diketahui bahwa $(0,1) - (a, x) - (1, x) - (0,1)$ adalah *cycle* dengan panjang tiga di graf $AG(R)$, terjadi kontradiksi. Jadi $AG(R) \neq \Gamma(R)$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Diketahui $AG(R) \neq \Gamma(R)$ sehingga terdapat $x, y \in Z(R)^*$ dimana $x - y$ adalah *edge* di $AG(R)$ yang bukan merupakan *edge* di $\Gamma(R)$ dan tidak ada *path* di $AG(R)$ dengan panjang dua dari x ke y sehingga $ann_R(x) \cap ann_R(y) = \{0\}$. Karena $xy = 0$ dan $ann_R(x) \cap ann_R(y) = \{0\}$, maka $ann_R(xy) = ann_R(x) \cup ann_R(y) \cup \{y\}$ sedemikian sehingga $y^2 \neq 0$ atau $ann_R(xy) = ann_R(x) \cup ann_R(y) \cup \{x\}$ sedemikian sehingga $x^2 \neq 0$ (catatan bahwa jika $\{x, y\} \subseteq ann_R(xy)$, maka $x - xy - y$ adalah *path* dalam $AG(R)$ dengan panjang dua). Tanpa menghilangankan sifat keumumannya, diasumsikan bahwa $ann_R(xy) = ann_R(x) \cup ann_R(y) \cup \{y\}$ dan $y^2 \neq 0$. Misalkan a menjadi elemen tak nol dari $ann_R(x)$ dan b menjadi elemen tak nol dari $ann_R(y)$. Karena $ann_R(x) \cap ann_R(y) = \{0\}$, maka $a + b \in ann_R(xy)\backslash(ann_R(x) \cup ann_R(y))$, dan karenanya $a + b = y$. Jadi $|ann_R(x)| = |ann_R(y)| = 2$. Karena $xy^2 = 0$, diperoleh $ann_R(x) = \{0, y^2\}$ dan $ann_R(y) = \{0, xy\}$. Karena $y^2 + \mathrm{xy} = \mathrm{y}$, maka $(y^2 + \mathrm{xy})^2 = y^2$. Karena $xy^3 = 0$ dan $xy^2 = x^2y^2 = 0$, maka $(y^2 + \mathrm{xy})^2 = y^2$ mengakibatkan $y^4 = y^2$. Karena $y^2 \neq 0$ dan $y^4 = y^2$, diperoleh y^2 adalah idempoten tak nol dari R. Karenanya $ann_R(xy) = ann_R(x) \cup ann_R(y) \cup \{y\} = \{0, y^2, xy, y\}$. Jadi $ann_R(xy) \subseteq yR$ dan $yR \subseteq ann_R(xy)$, didapatkan $ann_R(xy) = yR = \{0, y^2, xy, y\}$. Karena $y^2 + \mathrm{xy} = \mathrm{y}$ dan $y^4 = y^2$, diperoleh $(y^2 + \mathrm{xy})^3 = y^3$ dan karenanya $y^3 = y^2$. Jadi $y^2R = y(yR) = \{0, y^2\}$. Karena y^2 adalah idempoten tak nol dari R dan y^2R adalah ring dengan dua elemen, didapatkan bahwa y^2R adalah ring-isomorfik untuk $\mathbb{Z}_2$. Andaikan $f \in ann_R(y^2)$, maka $y^2f = y(yf) = 0$ berakibat $yf \in ann_R(y)$. Oleh karena itu, $yf = 0$ atau $yf = yx$. Andaikan $yf = 0$. Karena $ann_R(y) = \{0, xy\}$, sehingga $f = 0$ atau $f = xy$. Andaikan $yf = yx$ maka $y(f - x) = 0$ dengan demikian $f - x = 0$ atau $f - x = xy$. Oleh karena itu, $f = x$ atau $f = x + xy$. Didapatkan $0, x, xy, x + xy$ adalah elemen dari R yang berbeda, dengan demikian $ann_R(y^2) = \{0, x, xy, x + xy\}$. Karena $ann_R(y^2) = (1 - y^2)R$, diperoleh $(1 - y^2)R = \{0, x, xy, x + xy\}$. Karena $(1 - y^2)R$ adalah ring dengan empat elemen, disimpulkan bahwa $(1 - y^2)R$ adalah ring yang isomorfik dengan $\mathbb{Z}_4$ atau $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ atau F_4 atau $\mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. Jadi $x - y$ adalah *edge* $AG(R)$ yang bukan merupakan *edge* $\Gamma(R)$ dan tidak ada *path* dalam $AG(R)$ dengan panjang dua dari x ke y. Berdasarkan hipotesis, diperoleh ring R tidak tereduksi oleh Teorema 3.2.3. Karena R adalah ring yang isomorfik dengan $y^2R \times (1 - y^2)R$ dan tidak tereduksi, disimpulkan bahwa ring R isomorfik terhadap $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ atau $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$.

$(3) \Rightarrow (4)$. Diketahui ring R isomorfik terhadap $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ atau $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[X]/(X^2)$. Misalkan x elemen nilpotent dari R, maka $Z(R)^*$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu $A = \{(1,0), (1,1)x\}$ dan $B = \{x, (0,1), (0,1) + x\}$. Sehingga setiap elemen di A *adjacent* dengan setiap elemen di B dan setiap elemen di himpunan yang sama tidak saling *adjacent* dalam $AG(R)$. Karena $|A| = 2$ dan $|B| = 3$. maka $AG(R) = K^{2,3}$.

$(4) \Rightarrow (1)$. Karena $AG(R)$ adalah $K^{2,3}$ yang merupakan graf bipartite lengkap, maka $gr(AG(R)) = 4$. ■

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan didapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Setiap *edge* dari $\Gamma(R)$ juga merupakan *edge* dari $AG(R)$, tapi tidak sebaliknya.
2. $diam\big(AG(R)\big) \leq 2$ dan $gr\big(AG(R)\big) = \{3,4,\infty\}$.
3. Graf $AG(R) = \Gamma(R)$ jika dan hanya jika $|Min(R)| = 2$ untuk ring R komutatif tereduksi.

5. DAFTAR PUSTAKA

Anderson, D. F. & M. Naseer. (1993). Beck's coloring of a commutative Rings. *Journal of Algebra*, **159**, 500-514.

Anderson, D. F. & S. B. Mulay. (2007). On the diameter and *girth* of a zero-divisor graph. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **210**(2), 543-550.

Anderson, D. F. & P. S. Livingston. (1999). The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring. *Journal of Algebra*, **217**, 434-447. Diakses dari http://www.idealibrary.com

Badawi, A. (2014). On the Annihilator Graph of a Commutative Ring. *Communications in Algebra*, **42**, 1-14. Doi:10.1080/00927872.2012.707262.

Beck, I. (1986). Coloring of Commutative Rings. *Journal of Algebra*, **116**, 208-226.

Chartrand, G., Lesniak L., & Zhang, P. (2016). *Graph and Digraph*. New York: CRC Press, 6^{th} ed.

Dutta, S. & Lanong C. (2017). On Annihilator Graphs of a Finite Commutative Ring. *Transactions on Combinatorics*, **6**(1), 1-11.

Visweswaran, S. & P. Sarman (2017). Some Properties of the Complement of the Annihilator Graph of a Commutative Reduced Ring. *Palestine Journal of Mathematics*, **6**(2), 434-447.