

## SIFAT GRAF ANNIHILATOR NOL DARI RING KOMUTATIF

Haniiam Mariiaa, Vika Yugi Kurniawan, Sutrima

Program Studi Matematika FMIPA UNS Surakarta

haniiamm@student.uns.ac.id, vikayugi@staff.uns.ac.id, sutrima@staff.uns.ac.id

**Abstrak**

Diberikan ring komutatif  $R$  dengan elemen identitas tak nol. Graf annihilator nol dari ring  $R$  dinotasikan dengan  $\mathbf{ZA}(R)$  adalah suatu graf dengan himpunan vertex-nya merupakan himpunan elemen nonunit tak nol di  $R$  dan dua vertex berbeda  $x$  dan  $y$  adjacent jika  $\text{Ann}_R(x) \cap \text{Ann}_R(y) = 0$ . Pada penelitian ini dikaji mengenai sifat-sifat dasar dari graf annihilator nol, kemudian menentukan karakteristik ring  $R$  sedemikian sehingga graf annihilator nol merupakan graf terhubung, serta diberikan contohnya. Metode penelitian yang digunakan dalam makalah ini adalah studi literatur. Misalkan  $R$  suatu ring, jika  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf kosong, maka  $R$  adalah suatu ring lokal dan  $\text{Ann}_R(x) \neq \{0\}$  untuk setiap elemen nonunit  $x \in R$ . Dan sebaliknya juga benar jika  $R$  merupakan ring Bèzout. Diberikan ring Bèzout  $R$  dengan  $|\text{Max}(R)| < \infty$  sedemikian sehingga  $\delta(\mathbf{ZA}(R)) > 0$ , graf  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf hingga jika dan hanya jika setiap vertex pada  $\mathbf{ZA}(R)$  memiliki degree yang berhingga. Misalkan  $R$  merupakan ring semiprimatif, jika minimal terdapat satu dari ideal maksimal di  $R$  merupakan ideal utama maka  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf terhubung dengan  $\text{diam}(\mathbf{ZA}(R)) \leq 4$ .

**Kata Kunci:** graf annihilator nol, ideal maksimal, ideal utama, ring bèzout, ring komutatif

**1. PENDAHULUAN**

Konsep graf pembagi nol dikenalkan oleh Beck (1988), dalam kajiannya mengenai ring komutatif  $R$ . Graf pembagi nol  $G(R)$  adalah graf dengan himpunan vertex-nya merupakan pembagi nol di  $R$  (termasuk 0), dan dua vertex berbeda  $x$  dan  $y$  adjacent jika  $xy = 0$ . Dalam kajian yang lain, Anderson dan Livingston (1999) mempelajari tentang subgraf  $\Gamma(R)$  dari graf  $G(R)$  yang himpunan vertex-nya merupakan pembagi nol yang tak nol di  $R$ . Berikutnya banyak peneliti yang mengkaji dan mengembangkan penelitian tentang graf pembagi nol dari ring komutatif. Afkhami *et al.* (2017) memperkenalkan graf annihilator dari ring komutatif yang dinotasikan dengan  $AG(R)$ . Graf  $AG(R)$  merupakan graf tak berarah dengan himpunan vertex-nya merupakan pembagi nol yang tak nol di  $R$  dan dua vertex berbeda adjacent jika dan hanya jika  $\text{Ann}_R(xy) \neq \text{Ann}_R(x) \cup \text{Ann}_R(y)$ . Akbari *et al.* (2017), mengembangkan konsep graf ideal *co-annihilating* di ring  $R$ . Pada artikel ini akan dibahas mengenai graf annihilator nol dari ring komutatif yang mengacu pada kajian Hojjat (2018), yang mengenalkan graf annihilator nol dari ring  $R$ . Graf annihilator nol merupakan graf dengan himpunan vertex-nya adalah himpunan elemen non-unit tak nol di  $R$  dan dua vertex berbeda  $x$  dan  $y$  adjacent jika  $\text{Ann}_R(x) \cap \text{Ann}_R(y) = \{0\}$ . David *et al.* (2020)

melakukan penelitian mengenai perluasan graf  $\Gamma(R)$  dengan memodifikasi *vertex* dan hubungan *adjacency* dari graf  $\Gamma(R)$ .

## 2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan menggunakan referensi berupa buku, jurnal, atau penelitian mengenai struktur aljabar dan graf, khususnya graf annihilator nol dari ring komutatif. Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

- 1) mempelajari definisi-definisi dasar dan teorema yang berkaitan dengan struktur aljabar maupun teori graf,
- 2) mempelajari sifat dasar graf annihilator nol,
- 3) mengkaji karakteristik ring komutatif  $R$  sedemikian sehingga  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf terhubung.

## 3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

### 3.1 Konsep Dasar Graf

Berikut diberikan definisi dasar graf yang diambil dari Chartrand (1997). Graf  $G$  merupakan graf sederhana dengan himpunan *vertex*  $V(G)$  dan himpunan *edge*  $E(G)$ . *Degree* dari suatu *vertex*  $v$  adalah banyak *edge* yang *incident* dengan  $v$ . Minimum *degree* pada graf  $G$  dinotasikan dengan  $\delta(G)$ . Suatu graf  $G$  terhubung jika terdapat *path*  $u - v$  antara sebarang dua *vertex* di  $G$ . Untuk dua *vertex* berbeda  $x$  dan  $y$  dari suatu graf terhubung  $G$ ,  $d_G(x, y)$  merupakan panjang *path* terpendek dari  $x$  ke  $y$ . Diameter dari graf terhubung  $G$  adalah  $diam(G) = \sup\{d_G(x, y) | x \text{ dan } y \text{ vertex berbeda di } G\}$ . Graf *bipartite* adalah graf dimana semua *vertex*-nya dapat dipartisi menjadi dua bagian  $U$  dan  $V$  sedemikian sehingga setiap *edge* menghubungkan suatu *vertex* di  $U$  ke suatu *vertex* di  $V$ . Graf *bipartite* lengkap adalah graf *bipartite* dengan partisi  $U, V$  sedemikian sehingga untuk setiap *vertex* di  $U$  *adjacent* dengan setiap *vertex* di  $V$ . *Clique* dari graf  $G$  merupakan subset dari pasangan *vertex* yang *adjacent* dalam graf  $G$ .

### 3.2 Sifat Dasar Graf Annihilator Nol

Suatu graf merupakan graf kosong jika tidak memiliki *edge* (Chartrand, 1997). Ideal utama merupakan ideal yang dibangun oleh satu elemen di  $R$  (Fraleigh, 2003). Ring *Bèzout* adalah ring dimana semua ideal yang dibangun secara hingga dalam ring tersebut merupakan ideal utama (Hojjat, 2018). Berikut diberikan teorema mengenai sifat yang menyatakan  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf kosong.

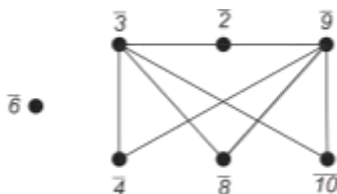
**Teorema 3.2.1.** *Diberikan ring  $R$ . Jika  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf kosong, maka  $R$  adalah suatu ring lokal dan  $\text{Ann}_R(x) \neq \{0\}$  untuk setiap elemen nonunit  $x \in R$ . Dan sebaliknya juga benar jika  $R$  merupakan ring *Bèzout*.*

*Bukti.* Diketahui  $\mathbf{ZA}(R)$  adalah graf kosong. Andaikan  $R$  bukan ring lokal dan  $R$  memiliki dua ideal maksimal,  $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ . Maka  $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = R$  berarti terdapat  $x \in \mathfrak{m}_1$  dan  $y \in \mathfrak{m}_2$  sedemikian sehingga  $x + y = 1$ . Jadi  $x$  dan  $y$  *adjacent*, dimana terjadi kontradiksi. Oleh karena itu  $R$  merupakan ring lokal. Misalkan  $\mathfrak{m}$  merupakan maksimal ideal dari  $R$  dan  $x$  adalah element dalam  $\mathfrak{m}$ . Andaikan  $\text{Ann}_R(x) = \{0\}$ . Maka  $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$  merupakan *clique* takhingga di  $\mathbf{ZA}(R)$  dimana terjadi kontradiksi. Jadi  $\text{Ann}_R(x) \neq \{0\}$ .

Misalkan  $R$  merupakan ring *Bèzout* lokal dan  $\text{Ann}_R(x) \neq \{0\}$  untuk setiap elemen nonunit  $x \in R$ . Misalkan  $x, y$  adalah dua vertex di  $\mathbf{ZA}(R)$ . Maka  $x, y \in \mathfrak{m}$ . Oleh karena itu  $Rx + Ry = Rz$  untuk beberapa elemen nonunit yang tak nol  $z \in R$ . Jadi  $x, y$  tidak *adjacent* yang menunjukkan bahwa  $\mathbf{ZA}(R)$  kosong. ■

Berikut ini diberikan contoh untuk memahami Teorema 3.2.1.

**Contoh 3.2.1.** Diberikan ring  $\mathbb{Z}_{12}$ , dengan dua ideal maksimal  $\mathfrak{m}_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$  dan  $\mathfrak{m}_2 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ . Graf  $\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_{12})$  dengan himpunan vertex  $V(\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_{12})) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$  dimana elemen dalam himpunan vertex tersebut merupakan elemen  $\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{m}_2$  selain nol. Ambil elemen  $\bar{4} \in \mathfrak{m}_1$  dan  $\bar{9} \in \mathfrak{m}_2$ , maka diperoleh  $\bar{4} + \bar{9} = \bar{1}$ . Karena  $\bar{1}$  merupakan elemen unit, berarti  $\bar{4}$  dan  $\bar{9}$  *adjacent*. Diperoleh graf  $\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_{12})$  bukan graf kosong. Berdasarkan definisi graf annihilator nol, diperoleh graf  $\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_{12})$  Seperti pada Gambar 3.2.1



Gambar 3.2.1 graf  $\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_{12})$

Didefinisikan  $Jac(R)$  adalah irisan dari semua annihilator pada suatu ring  $R$ . Berikut diberikan teorema yang menyatakan  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf hingga.

**Teorema 3.2.2.** Diberikan ring *Bèzout*  $R$  dengan  $|\text{Max}(R)| < \infty$  sedemikian sehingga  $\delta(\mathbf{ZA}(R)) > 0$ . Graf  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf hingga jika dan hanya jika setiap vertex pada  $\mathbf{ZA}(R)$  memiliki degree yang berhingga.

*Bukti.* ( $\Rightarrow$ )

Misalkan  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf hingga, maka terdapat  $n$  vertex dalam  $\mathbf{ZA}(R)$ , yang artinya terdapat  $x_1, x_2, \dots, x_n$  elemen nonunit tak nol di  $R$ .

Misalkan untuk setiap *vertex*  $x_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$  *adjacent* dengan setiap *vertex* lainnya, maka *vertex*  $x_i$  memiliki  $n - 1$  *degree*. Terbukti setiap *vertex* memiliki *degree* yang berhingga.

( $\Leftarrow$ )

Misalkan setiap *vertex* di  $\mathbf{ZA}(R)$  memiliki *degree* berhingga. Jika  $\text{Ann}_R(x) = \{0\}$  untuk suatu elemen nonunit yang tak nol  $x \in R$ , maka  $x$  *adjacent* ke semua *vertex* di  $\mathbf{ZA}(R)$  yang berarti  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf berhingga. Diasumsikan bahwa  $\text{Ann}_R(x) \neq \{0\}$  untuk setiap elemen nonunit yang tak nol  $x \in R$ . Jelas bahwa  $\text{Jac}(R) = \{0\}$ . Kebalikannya, diasumsikan bahwa terdapat elemen tak nol  $a \in \text{Jac}(R)$ . Karena  $\mathbf{ZA}(R)$  tidak memiliki *isolated vertex*,  $a$  *adjacent* ke *vertex* lain, misal  $b$ . Karena  $R$  ring *Bézout*,  $Ra + Rb$  dibangun oleh elemen nonunit tak nol  $c$  di  $R$  maka  $\text{Ann}_R(Ra + Rb) = \text{Ann}_R(c) \neq \{0\}$ , dimana hal ini tidak mungkin. Jadi  $\text{Jac}(R) = \{0\}$ . Dengan Teorema *Chinese Remainder* diperoleh  $R \simeq F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ . Dimana  $F_i$  adalah lapangan dan  $n = |\text{Max}(R)|$ . Misalkan  $0 \neq u \in F_1$  Maka  $(u, 0, \dots, 0)$  dan  $(0, 1, \dots, 1)$  *adjacent*. Karena  $(0, 1, \dots, 0)$  memiliki *degree* yang berhingga, jadi  $F_1$  merupakan lapangan berhingga. Demikian pula ditunjukkan  $F_i$  merupakan lapangan berhingga. Akibatnya  $R$  memiliki elemen nonunit tak nol yang berhingga dan terbukti. ■

Berikut diberikan teorema yang menyatakan graf  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf *bipartite* dan graf *bipartite* lengkap.

**Teorema 3.2.3.** *Diberikan ring Bézout  $R$  dengan  $|\text{Max}(R)| < \infty$ . Maka*

1.  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf *bipartite* dengan  $\delta(\mathbf{ZA}(R)) > 0$ ,
2.  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf *bipartite* lengkap,
3.  $R \simeq F_1 \times F_2$  dimana  $F_1$  dan  $F_2$  merupakan lapangan.

*Bukti.* (1)  $\Rightarrow$  (3)

Andaikan  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf *bipartite* dengan  $\delta(\mathbf{ZA}(R)) > 0$ . Jika  $\text{Ann}_R(x) = \{0\}$  untuk suatu elemen nonunit tak nol  $x$  di  $R$ , maka  $\{x^n | n \in \mathbb{N}\}$  adalah *clique* tak hingga, dimana terjadi kontradiksi. Maka, untuk setiap elemen nonunit tak nol  $x$  di  $R$  terdapat  $\text{Ann}_R(x) \neq \{0\}$ . Seperti pada bukti Teorema 3.2.2 dapat ditunjukkan  $R = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ , dimana  $F_i$  merupakan lapangan dan  $n = |\text{Max}(R)|$ . Jelas bahwa  $n \neq 1$ . Jika  $n \geq 3$ , maka  $\{(0, 1, \dots, 1), (1, 0, 1, \dots, 1), (1, 1, 0, 1, \dots, 1)\}$  adalah *clique* di  $\mathbf{ZA}(R)$ , terjadi kontradiksi. Jadi  $R \simeq F_1 \times F_2$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2)

Andaikan  $R \simeq F_1 \times F_2$  dimana  $F_1$  dan  $F_2$  merupakan lapangan. Setiap *vertex* di  $\mathbf{ZA}(R)$  berbentuk  $(u, 0)$  atau  $(0, v)$  dimana  $0 \neq u \in F_1$  dan  $0 \neq v \in F_2$ . Dan dua *vertex*  $(u, 0)$  dan  $(v, 0)$  *adjacent*. Disisi lain setiap dua *vertex*  $(u_1, 0)$  dan  $(u_2, 0)$  tidak *adjacent*.

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Karena  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf *bipartite* lengkap, maka  $\mathbf{ZA}(R)$  bukan graf kosong, sehingga terdapat *edge* dalam  $\mathbf{ZA}(R)$ , jelas bahwa  $\delta(\mathbf{ZA}(R)) > 0$ . ■

Berikut ini diberikan contoh untuk memahami Teorema 3.2.3.

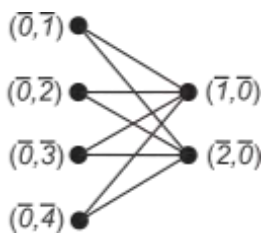
**Contoh 3.2.2.** Diketahui  $\mathbb{Z}_3$  dan  $\mathbb{Z}_5$  merupakan lapangan, dan  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  adalah ring.

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{4})\}$$

Selanjutnya diperoleh elemen nonunit tak nol dalam  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  adalah  $\{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}$ . Kemudian dapat ditentukan annihilator dari masing-masing elemen nonunit tak nol, sebagai berikut

$$\begin{aligned} Ann_R((\bar{0}, \bar{1})) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\} \\ Ann_R((\bar{0}, \bar{2})) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\} \\ Ann_R((\bar{0}, \bar{3})) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\} \\ Ann_R((\bar{0}, \bar{4})) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\} \\ Ann_R((\bar{1}, \bar{0})) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})\} \\ Ann_R((\bar{2}, \bar{0})) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})\}. \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi graf annihilator nol, himpunan *vertex* pada graf  $\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$  merupakan himpunan elemen nonunit tak nol pada ring  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$  dan *vertex*  $x$  dan  $y$  *adjacent* jika  $Ann_R(x) \cap Ann_R(y) = \{0\}$ . Sehingga diperoleh  $V(\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}$  dan  $E(\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) = \{((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})), ((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0})), ((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0})), ((\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})), ((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})), ((\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0})), ((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{0})), ((\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{0}))\}$ . Didapat graf  $\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$  seperti pada Gambar 3.2.2



**Gambar 3.2.2** Graf  $\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$

### 3.3 Sifat Keterhubungan Graf $\mathbf{ZA}(R)$

Ring  $R$  dikatakan *semiprimitive* jika  $Jac(R) = 0$ . Ring  $R$  *semiprimitive* jika dan hanya jika terdapat *subdirect product* dari lapangan (Hojjat, 2018). Berikut diberikan beberapa teorema yang menyatakan  $\mathbf{ZA}(R)$  graf terhubung.

**Teorema 3.3.1.** *Diberikan ring  $R$  semiprimitive. Jika minimal satu dari ideal maksimal di  $R$  merupakan ideal utama, maka  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf terhubung dengan  $\text{diam}(\mathbf{ZA}(R)) \leq 4$ .*

*Bukti.* Andaikan  $\mathfrak{m}$  merupakan maksimal ideal di  $R$  dimana  $\mathfrak{m} = Rt$  untuk suatu  $t \in R$ . Misalkan  $x, y$  adalah dua elemen nonunit berbeda yang tak nol di  $R$ . Berdasarkan kasus berikut :

Kasus 1. Misalkan  $x, y \notin \mathfrak{m}$ . Maka  $Rx + \mathfrak{m} = R$  dan  $Ry + \mathfrak{m} = R$ . Karena  $x, y$  adjacent ke  $t$ . Jadi  $d_{\mathbf{ZA}(R)}(x, y) \leq 2$ .

Kasus 2. Misal  $x \in \mathfrak{m}$  dan  $y \notin \mathfrak{m}$ . Perhatikan bahwa  $y$  adjacent dengan  $t$ . Karena  $\text{Jac}(R) = \{0\}$ , terdapat ideal maksimal  $\mathfrak{m}'$  sedemikian sehingga  $x \notin \mathfrak{m}'$ . Jadi  $Rx + \mathfrak{m}' = R$ , oleh karenanya terdapat elemen  $r \in R$  dan  $z \in \mathfrak{m}'$  sedemikian sehingga  $rx + z = 1$ . Oleh karena itu  $\text{Ann}_R(x) \cap \text{Ann}_R(z) = \{0\}$ . Jadi  $x$  adjacent ke  $z$ . Jelas  $z \notin \mathfrak{m}$ . Maka  $z$  adjacent dengan  $t$ . jadi  $d_{\mathbf{ZA}(R)}(x, y) \leq 3$ .

Kasus 3. Misal  $x, y \in \mathfrak{m}$ . Dengan cara yang sama pada kasus 2 menunjukkan bahwa  $d_{\mathbf{ZA}(R)}(x, t) \leq 2$  dan  $d_{\mathbf{ZA}(R)}(y, t) \leq 2$ . Jadi  $d_{\mathbf{ZA}(R)}(x, y) \leq 4$ .

Menyebabkan  $\mathbf{ZA}(R)$  graf lengkap dengan  $\text{diam}(\mathbf{ZA}(R)) \leq 4$ . ■

Berikut ini diberikan contoh untuk memahami Teorema 3.3.1.

**Contoh 3.3.1.** Berdasarkan Contoh 3.2.2 misalkan  $I = 0 \times \mathbb{Z}_5$  merupakan ideal maksimal dan ideal utama dalam ring  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ , dimana  $I = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4})\}$ , maka diperoleh graf  $\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$  seperti pada Gambar 3.2.2 dengan  $\text{diam}(\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)) = 2 \leq 4$ .

**Teorema 3.3.2.** *Diberikan Ring Bézout  $R$ . Jika  $\mathbf{ZA}(R)$  terhubung, maka satu dari kondisi berikut berlaku :*

1. Terdapat elemen nonunit tak nol  $x$  di  $R$  sedemikian sehingga  $\text{Ann}_R(x) = \{0\}$ ,
2.  $\text{Jac}(R) = \{0\}$ , dan
3.  $\text{Jac}(R) = \{0, x\}$  dimana  $x$  merupakan satu-satunya elemen nonunit tak nol di  $R$ .

*Bukti.* Diasumsikan untuk setiap elemen nonunit tak nol  $x$  di  $R$ ,  $\text{Ann}_R(x) \neq \{0\}$  dan  $\text{Jac}(R) \neq \{0\}$ . Misalkan  $x$  merupakan elemen tak nol di  $\text{Jac}(R)$ . Ambil sebarang vertex  $y$  di  $(\mathbf{ZA}(R))$  yang berbeda dari  $x$ . Dengan demikian  $Rx + Ry = Rz$  untuk suatu  $z \in R$ , karena  $R$  ring Bézout. Perhatikan bahwa  $y \in \mathfrak{m}$  untuk suatu ideal maksimal  $\mathfrak{m}$  di  $R$ . Oleh karena itu  $z$  merupakan elemen nonunit tak nol dan berdasarkan asumsi  $\text{Ann}_R(z) \neq \{0\}$ , menunjukkan bahwa  $x$  dan  $y$  tidak adjacent. Kontradiksi ini mengartikan bahwa  $|V(\mathbf{ZA}(R))| = 1$  dan  $\text{Jac}(R) = \{0, x\}$ . ■

**Teorema 3.3.3.** Diberikan  $R = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$  dimana  $F_i$  merupakan lapangan, maka  $\mathbf{ZA}(R)$  merupakan graf terhubung dengan

$$\text{diam}(\mathbf{ZA}(R)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 2 \text{ dan } |F_1| = |F_2| = 2, \\ 2, & \text{jika } n = 2 \text{ dan } |F_1| > 2 \text{ atau } |F_2| > 2, \text{ dan} \\ 3, & \text{jika } n \geq 3. \end{cases}$$

*Bukti.* Misal  $n = 2$ . Pada kasus ini setiap *vertex* di  $\mathbf{ZA}(R)$  berbentuk  $(u, 0)$  atau  $(0, v)$  dimana  $u \neq 0$  dan  $v \neq 0$ . Selanjutnya dua *vertex*  $(u, 0)$  dan  $(v, 0)$  *adjacent*. Pada kasus dimana  $n = 2$  dan  $|F_1| = |F_2| = 2$ , terdapat  $R \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Jadi  $\mathbf{ZA}(R) \simeq K_2$ . Misal  $n = 2$  dan  $|F_1| > 2$ . Dikases ini, setiap dua *vertex* yang berbeda  $(u_1, 0)$  dan  $(u_2, 0)$  tidak *adjacent*. Disisi lain  $(u_1, 0)$  dan  $(u_2, 0)$  *adjacent* dengan  $(0, 1)$ . Jadi  $d_{\mathbf{ZA}(R)}((u_1, 0), (u_2, 0)) = 2$ , oleh karena itu  $\text{diam}(\mathbf{ZA}(R)) = 2$ .

Sekarang misal  $n \geq 3$ . Diasumsikan bahwa  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  dan  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  merupakan *vertex* yang berbeda. Terdapat  $i, j$  sedemikian sehingga  $u_i \neq 0$  dan  $v_j \neq 0$ . Jadi  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  *adjacent* dengan

$$(1, \dots, 1, \overset{ke-i}{\widetilde{0}}, 1, \dots, 1), \quad \text{dan} \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad \textit{adjacent} \quad \text{dengan}$$

$$(1, \dots, 1, \overset{ke-i}{\widetilde{0}}, 1, \dots, 1), \quad \text{selanjutnya} \quad \text{ jika } \quad i \neq j, \quad \text{ maka } \quad \textit{vertex}$$

$(1, \dots, 1, \overset{ke-i}{\widetilde{0}}, 1, \dots, 1)$  *adjacent* dengan  $(1, \dots, 1, \overset{ke-j}{\widetilde{0}}, 1, \dots, 1)$ . Sehingga  $\mathbf{ZA}(R)$  terhubung dan  $d_{\mathbf{ZA}(R)}(u, v) \leq 3$ . Pada kasus khusus, kita mempunyai *path* berikut

$$(0, 1, 0, \dots, 0) - (1, 0, 1, \dots, 1) - (0, 1, \dots, 1) - (1, 0, \dots, 0)$$

yang mengakibatkan  $\text{diam}(\mathbf{ZA}(R)) = 3$ . ■

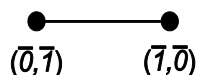
Berikut ini diberikan contoh untuk memahami Teorema 3.3.3.

**Contoh 3.3.2.** Diketahui  $\mathbb{Z}_2$  merupakan lapangan, dan  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  adalah ring.  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$ . Elemen nonunit tak nol pada  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  adalah  $\{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ , diperoleh :

$$\begin{aligned} \text{Ann}_R((\bar{0}, \bar{1})) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\} \\ \text{Ann}_R((\bar{1}, \bar{0})) &= \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh  $V(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})\}$  dan  $E(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{((\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}))\}$ .

Diperoleh graf  $\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  dengan  $\text{diam}(\mathbf{ZA}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)) = 1$ , seperti pada Gambar 3.3.2.



**Gambar 3.3.2** Graf  $ZA(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

#### 4 SIMPULAN

Dari pembahasan sebelumnya diperoleh kesimpulan yang dibagi menjadi dua yaitu

- 4.1. Sifat dasar graf annihilator nol seperti yang tertuang pada Teorema 3.2.1, Teorema 3.2.2, dan Teorema 3.2.3.
- 4.2. Sifat keterhubungan graf annihilator nol seperti yang tertuang pada Teorema 3.3.1, Teorema 3.3.2, dan Teorema 3.3.3.

#### 5 DAFTAR PUSTAKA

- Afkhami, M., Khashyarmanesh, K., & Rajabi, Z. (2017), On The Annihilator Graph of a Commutative Ring, *Czech Math J*, (67), 151-169. doi:10.21136/CMJ.2017.0436-15.
- Amjadi, J., & A. Alilou (2018), The Co-Annihilating Graph of a Commutative Ring, *Discrete Mathematics*, 10(1). doi:10.1142/S1793830918500131.
- Anderson, D. F., & P. S. Livingston (1999), The Zero-Devisor Graph of a Commutative Ring, *J. Algebra*, 217, 434-447. Diakses dari <http://www.idealibrary.com>
- Akbari, S., A. Alilou, J. Amjadi, & S. M. Sheikholeslami (2017), {The Co-Annihilating-Ideal Graph of a Commutative Ring, *Canadian Math. Bull.*, 60(1), 3-11. doi:10.04153/CMB-2016-017-1.
- Beck, I. (1988), Coloring of Commutative Ring, *J. Algebra*, 116, 208-226.
- Chartrand, G. (1997), *Introductory Graphs Theory*, New York, Dover Publication.Inc.
- Anderson, D. F., & G. McClurkin (2020), Generalization of the Zero-Devisor Graph, *International Electronic Journal of Algebra*, (27), 237-262. doi: 10.24330/ieja.663079
- Fraleigh, John. B. (2003), *First Course in Abstract Algebra*, India, Pearson Education.
- Mostafanasab, H. (2018), Zero Annihilator Graph of a Commutative Rings, *Kragujevac Journal of Mathematics*. doi:10.5937/KgJMath1804517M.