MENYELESAIKAN SOAL PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (TIPE: *A SPECIAL TRANSFORMATION*) DENGAN PROSEDUR YANG SISTEMATIS

Wahyudi[1)]
[1)] Universitas Muhammadiyah Ponorogo
email: wahyudibooleng@yahoo.co.id

Abstrak

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat suatu turunan lebih dari satu variabel terikat terhadap lebih dari satu variabel bebas. Terdapat dua persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turunan lebih dari satu variabel terikat dan satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat turunan lebih dari satu variabel terikat dan lebih dari satu variabel bebas. Dalam penelitian ini soal persamaan diferensial biasa yang akan digunakan adalah termasuk dalam persamaan transformasi khusus. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan prosedur penyelesaian persamaan tersebut secara sistematis.

Kata Kunci: *Persamaan diferensial Biasa, Persamaan diferensial Parsial*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial sering diaplikasikan dalam berbagai bidang seperti halnya dalam bidang fisika, kimia dan biologi. Aplikasi atau penerapan sering disebut model matematika. Model matematika yang sering digunakan adalah berbentuk persamaan diferensial. Peneliti menggunakan rujukan dari Ross (2004) yang menjelaskan bahwa persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel terikat dengan satu atau lebih variabel bebas. Sedangkan menurut Mursita (2009) persamaan diferensial merupakan persamaan yang berkaitan dengan turunan dari suatu fungsi atau memuat suku-suku dari fungsi tersebut.

Terkait dengan ilmu matematika yang sering diaplikasikan pada berbagai bidang dijelaskan oleh Billingham dan Otto (2003) yang menjelaskan bahwa dalam bidang fisika, kimia dan biologi sering dideskripsikan dengan model matematika. Untuk memformulasikan model, diperlukan untuk menyelesaikan persamaan diferensial berupa solusi yang digunakan untuk memprediksi atau menggambarkan permasalahan dalam bidang tersebut. Dengan demikian perlu ketelitian dalam menentukan solusi suatu persamaan diferensial.

Sebelum menentukan solusi, terlebih dahulu mengklasifikasikan persamaan diferensial. Menurut Ross (2004) klasifikasi persamaan diferensial berdasarkan banyaknya variabel bebas yang termuat adalah persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Menurut Ricardo (2009) persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat fungsi satu variabel bebas yang tidak diketahui dan satu atau lebih turunan dari fungsi tersebut. Sedangkan, jika persamaan tersebut mengandung fungsi yang lebih dari satu variabel bebas dan turunannya parsial maka dikatakan sebagai persamaan diferensial parsial.

Berdasarkan konsep kelinearannya terbagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear. Dalam hal ini persamaan diferensial yang dikaji adalah persamaan diferensial biasa yang linear. Dalam Ross (2004) terdapat lima macam persamaan diferensial biasa yang linear, diantaranya persamaan eksak, persamaan *separable* (pemisah variabel), persamaan homogen, persamaan linear, dan persamaan bernoulli. Terdapat juga persamaan diferensial yang harus di tranformasi bentuknya atau persamaan diferensial yang membutuhkan faktor integrasi supaya diperoleh solusi yang tepat.

Mengenai hal ini, peneliti lebih memfokuskan pada persamaan diferensial yang harus ditransformasikan terlebih dahulu. Peneliti ingin mengembangkan prosedur yang sistematis untuk menentukan solusi persamaan diferensial yang diambil dari Ross (2004) dengan menggunakan aturan integral maupun turunan yang telah dibahas di Purcell (2003) dan Purcell (2004).

2. METODE PENELITIAN

Peneliti menggunakan metode penelitian *research literature* (penelitian kepustakaan). Metode penelitian tersebut menggunakan teori-teori pendukung untuk menyelesaikan soal persamaan diferensial (*a special transformation*). Menurut Khatibah (2011) penelitian kepustakaan merupakan berbagai aktifitas yang berkaitan dengan metode pengumpulan data literatur, catatan, hasil membaca yang mana literatur yang digunakan berbentuk media cetak, media elektronik, dan dokumen yang berkaitan dengan perpustakaan.

3. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Menentukan solusi persamaan diferensial yang ditransformasi

Menurut Ross (2004) transformasi dalam suatu persamaan diferensial ini akan mereduksi menjadi persamaan homogen dan bernoulli. Dalam hal ini, peneliti lebih mengacu pada persamaan diferensial yang ditransformasi ke dalam persamaan homogen. Persamaan homogen adalah persamaan diferensial orde 1

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.1}$$

Jika persamaan diferensial tersebut ditulis dalam bentuk turunan

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.2}$$

yang terdapat fungsi g sedemikian hingga $f(x,y)$ dapat ditulis dalam bentuk

$$g\left({}^{y}\!/_{x}\right) \tag{1.3}$$

Teorema: persamaan diferensial yang akan ditransformasikan, bentuk umumnya adalah

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0 \tag{1.4}$$

dengan a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 merupakan konstanta. Jika $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$, maka transformasinya

$$\begin{aligned}x&=X+h\\ y&=Y+k\end{aligned} \tag{1.5}$$

dengan (h,k) merupakan solusi sistem persamaan

$$\begin{aligned}a_1h+b_1k+c_1&=0\\ a_2h+b_2k+c_2&=0\end{aligned} \tag{1.6}$$

mereduksi persamaan (1.1) menjadi persamaan homongen

$$\left(a_1X+b_1Y\right)dX+\left(a_2X+b_2Y\right)dY=0 \tag{1.7}$$

dengan variabel *X* dan *Y* (Ross, 2004).

Persamaan diferensial yang akan diselesaikan mengacu pada Ross (2004) yang dikembangkan dengan prosedur yang sistematis. Persamaan diferensialnya adalah

$$\left(x-2y+1\right)dx+\left(4x-3y-6\right)dy=0 \tag{1.8}$$

Dari persamaan (1.8) diketahui bahwa

$$a_1=1,\ b_1=-2,\ c_1=1, a_2=4,\ b_2=-3,\ c_2=-6 \tag{1.9}$$

dengan demikian,

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{1}=4\neq\frac{3}{2}=\frac{b_2}{b_1}$$

Sehingga persamaan (1.7) akan ditransformasi ke dalam persamaan homogen. Untuk memperoleh $\left(h,k\right)$ dengan mensubstitusikan (1.9) ke dalam persamaan (1.6), sehingga diperoleh

$$h-2k+1=0$$
$$4h-3k-6=0$$

Dengan mengunakan metode substitusi, eliminasi atau campuran (substitusi dan eliminasi) diperoleh

$$\begin{aligned} h&=3\\ k&=2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Kemudian persamaan (1.10) disubstitusikan ke dalam persamaan (1.5), diperoleh

$$\begin{aligned} x&=X+3\\ y&=Y+2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Persamaan (1.11) merupakan transformasi untuk persamaan (1.8) yang akan mereduksinya menjadi persamaan homogen. Untuk mendapatkan persamaan homogen tersebut, persamaan (1.11) disubstitusikan ke dalam persamaan (1.8)

$$\left[\left(X+3\right)-2\left(Y+2\right)+1\right]dX+\left(4\left(X+3\right)-3\left(Y+2\right)-6\right)dY=0 \tag{1.12}$$

$$\left[X-2Y\right]dX+\left[4X-3Y\right]dY=0 \tag{1.13}$$

atau

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{\left[X-2Y\right]}{\left[4X-3Y\right]} \tag{1.14}$$

atau

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\left[X-2Y\right]}{\left[3Y-4X\right]} \tag{1.15}$$

atau

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\left[1-2\left(Y/X\right)\right]}{\left[3\left(Y/X\right)-4\right]} \tag{1.16}$$

Jelas bahwa persamaan (1.13) merupakan persamaan homogen yang ditunjukkan pada persamaan (1.16). Selanjutnya, untuk menyelesaikan persamaan homogen dengan memisalkan

$$Y=vX \tag{1.17}$$

Kemudian persamaan (1.17) disubstitusikan ke persamaan (1.16), diperoleh

$$\frac{d(vX)}{dX}=\frac{1-2v}{3v-4} \tag{1.18}$$

atau

$$v+X\frac{dv}{dX}=\frac{1-2v}{3v-4} \tag{1.19}$$

atau

$$X\frac{dv}{dX}=\frac{1-2v}{3v-4}-v \tag{1.20}$$

Kemudian persamaan (1.16) direduksi menjadi

$$\frac{3v-4}{3v^2-2v-1}dv=-\frac{1}{X}dX \tag{1.21}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (1.20) peneliti mengembangkan dari Ross (2004) dengan menggunakan prosedur yang sistematis yaitu

$$\int\frac{3v-4}{3v^2-2v-1}dv=-\int\frac{1}{X}dX \qquad \text{(kedua ruas diintegralkan)} \tag{1.22}$$

Untuk $\int\frac{3v-4}{3v^2-2v-1}dv$ pada ruas kiri tidak boleh langsung diintegralkan, karena tidak memenuhi aturan integral yaitu $\int[f(x)]^r f'(x)dx$. Misal $u=3v^2-2v-1$, maka

$$du=(6v-2)dv$$

Padahal pada persamaan (1.22) ruas kiri diketahui bahwa $(3v-4)dv$. Dengan demikian, dalam kasus seperti ini tidak dapat langsung diintegralkan. Supaya $\int\frac{3v-4}{3v^2-2v-1}dv$ dapat diselesaikan, maka $\frac{3v-4}{3v^2-2v-1}$ diubah dengan aturan faktor linear dalam kalkulus 1. Sebelumnya diperlukan manipulasi aljabar terlebih dahulu, yaitu

$$\int\left(\frac{3v-1}{3v^2-2v-1}-\frac{3}{3v^2-2v-1}\right)dv=-\int\frac{1}{X}dX \qquad \text{(manipulasi aljabar)} \tag{1.23}$$

$$\int\frac{3v-1}{3v^2-2v-1}dv-\int\frac{3}{3v^2-2v-1}dv=-\int\frac{1}{X}dX \quad \text{(sifat linear)} \tag{1.24}$$

Untuk $\int\frac{3}{3v^2-2v-1}dv$ diubah dengan aturan faktor linear, yaitu

$$\frac{3}{3v^2-2v-1}=\frac{3}{(3v+1)(v-1)} \quad \text{(pemfaktoran)} \tag{1.25}$$

$$\frac{3}{(3v+1)(v-1)}=\frac{A}{(3v+1)}+\frac{B}{(v-1)} \quad \text{(faktor linear)} \tag{1.26}$$

Sehingga didapatkan

$$\frac{3}{(3v+1)(v-1)}=\frac{A(v-1)}{(3v+1)}+\frac{B(3v+1)}{(v-1)} \tag{1.27}$$

Pandang kedua ruas penyebutnya, diperoleh

$$3=A(v-1)+B(3v+1) \tag{1.28}$$

$$3 = Av - A + 3Bv + B \quad \text{(distribusi kanan)} \tag{1.29}$$

$$3 = (A+3B)v + (B-A) \qquad \text{(pengelompokan adanya variabel)} \tag{1.30}$$

Dari persamaan (1.30) diketahui bahwa pada ruas kiri tidak terdapat unsur variabel, maka

$$(A+3B) = 0 \Leftrightarrow A = -3B \tag{1.31}$$

dan

$$3 = B - A \tag{1.32}$$

Persamaan (1.31) disubstitusikan ke persamaan (1.32) sehingga diperoleh $B = 3/4$ dan $A = -9/4$. Untuk masing-masing nilai dari A dan B disubstitusikan ke persamaan (1.26), yaitu

$$\frac{3}{(3v+1)(v-1)} = \frac{-9}{4(3v+1)} + \frac{3}{4(v-1)} \tag{1.33}$$

Selanjutnya persamaaan (1.24) menjadi

$$\int \frac{3v-1}{3v^2-2v-1}dv - \int\left(\frac{-9}{4(3v+1)} + \frac{3}{4(v-1)}\right)dv = -\int \frac{1}{X}dX \tag{1.34}$$

Dengan demikian persamaan (1.34) dapat diintegralkan, maka diperoleh

Untuk $\int \frac{3v-1}{3v^2-2v-1}dv$ dengan cara, misal $u = 3v^2 - 2v - 1$, diketahui bahwa $du = (6v-2)dv \Leftrightarrow \frac{1}{2}du = (3v-1)dv$. Selanjutnya, dengan memisalkan tersebut, diperoleh

$$\int \frac{3v-1}{3v^2-2v-1}dv = \int \frac{1}{u}.\frac{1}{2}du \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \tag{1.35}$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa

$$\int \frac{3v-1}{3v^2-2v-1}dv = \frac{1}{2}\ln\left|3v^2-2v-1\right| + C_1 \tag{1.36}$$

Dengan cara yang sama, maka untuk

$$\int \frac{-9}{4(3v+1)}dv = -\frac{3}{4}\ln|3v+1| + C_2 \tag{1.37}$$

dan

$$\int \frac{3}{4(v-1)}dv = \frac{3}{4}\ln|v-1| + C_3 \tag{1.38}$$

dan

$$-\int \frac{1}{X}dX = -\ln|X| + C_4 \tag{1.39}$$

Berdasarkan persamaan (1.36), (1.37), (1.38), dan (1.39), maka hasil integral dari persamaan (1.34) yaitu

$$\frac{1}{2}\ln\left(3v^2-2v-1\right) + C_1 - \left[-\frac{3}{4}\ln(3v+1) + C_2 + \frac{3}{4}\ln(v-1) + C_3\right] = -\ln X + C_4 \tag{1.40}$$

atau

$$\frac{1}{2}\ln\left(3v^2-2v-1\right) + \frac{3}{4}\ln(3v+1) - \frac{3}{4}\ln(v-1) + C_1 - (C_2 + C_3) = -\ln X + C_4 \tag{1.41}$$

atau

$$\frac{1}{2}\ln\left|3v^2-2v-1\right|+\frac{3}{4}\frac{\ln\left|3v+1\right|}{\ln\left|v-1\right|}=-\ln X+C_5 \qquad (1.42)$$

untuk $C_5=C_4-C_1+C_2+C_3$

atau

$$\frac{1}{2}\ln\left|3v^2-2v-1\right|+\frac{3}{4}\frac{\ln\left|3v+1\right|}{\ln\left|v-1\right|}=-\ln\left|X\right|+\ln\left|C\right| \qquad (1.43)$$

atau

$$\frac{1}{2}\ln\left|3v^2-2v-1\right|+\frac{3}{4}\frac{\ln\left|3v+1\right|}{\ln\left|v-1\right|}=\ln\frac{\left|C\right|}{\left|X\right|} \qquad \text{(sifat logaritma)} \qquad (1.44)$$

atau

$$2\ln\left|3v^2-2v-1\right|+3\frac{\ln\left|3v+1\right|}{\ln\left|v-1\right|}=4\ln\frac{\left|C\right|}{\left|X\right|} \qquad \text{(kedua ruas dikalikan 2)} \qquad (1.45)$$

atau

$$\ln\left(3v^2-2v-1\right)^2+\ln\left|\frac{3v+1}{v-1}\right|^3=\ln\left(\frac{C^4}{X^4}\right) \qquad \text{(sifat-sifat logaritma)} \qquad (1.46)$$

atau

$$\ln\left(3v^2-2v-1\right)^2\left|\frac{3v+1}{v-1}\right|^3=\ln\left(\frac{C^4}{X^4}\right) \qquad \text{(sifat logaritma)} \qquad (1.47)$$

atau

$$\ln\left|\frac{\left(3v+1\right)^5}{v-1}\right|=\ln\left(\frac{C^4}{X^4}\right) \qquad \text{(sifat logaritma)} \qquad (1.48)$$

atau

$${}^{e}\log\left|\frac{\left(3v+1\right)^5}{v-1}\right|={}^{e}\log\left(\frac{C^4}{X^4}\right) \qquad \text{(fungsi log. natural)} \qquad (1.49)$$

atau

$$\frac{C^4}{X^4}=e^{{}^{e}\log\left|\frac{(3v+1)^5}{v-1}\right|} \qquad \text{(fungsi log. natural)} \qquad (1.50)$$

atau

$$\frac{C^4}{X^4}=\frac{\left(3v+1\right)^5}{v-1} \qquad \text{(sifat fungsi log. natural)} \qquad (1.51)$$

atau

$$C^4\left(v-1\right)=X^4\left(3v+1\right)^5 \qquad \text{(sifat aljabar)} \qquad (1.52)$$

Ingat $v=\frac{Y}{X}$ dan dari persamaan (1.11) diketahui bahwa $X=x-3$ dan $Y=y-2$, serta $C^4=C$, maka diperoleh

$$C\left(Y-X\right)=\left(3Y+X\right)^5 \qquad (1.53)$$

atau

$$C\left(\left(y-2\right)-\left(x-3\right)\right)=\left(3\left(y-2\right)+\left(x-3\right)\right)^{5} \tag{1.54}$$

atau

$$C\left(y-x+1\right)=\left(3y+x-9\right)^{5} \bullet \tag{1.55}$$

4. PENUTUP

Makalah ini lebih menekankan pada prosedural yang sistematis dalam menyelesaikan persamaan diferensial terutama persamaan diferensial yang harus ditransformasi terlebih dahulu sehingga mereduksi persamaan sebelumnnya menjadi persamaan homogen. Kemudian diselesaikan dengan prosedural dalam persamaan homogen. Peneliti mengembangkan dalam hal prosedural yang sistematis dari soal persamaan diferensial pada buku pegangan Ross (2004). Hal ini bertujuan untuk mempermudah pembaca terutama mahasiswa supaya lebih kreatif dalam menyelesaikan soal persamaan diferensial. Karena kasus di lapangan, sebagian mahasiswa masih terdapat kesulitan dalam menyelesaikan soal persamaan diferensial dengan prosedural yang sistematis.

5. DAFTAR PUSTAKA

Billingham, A.C dan Otto, S.R. (2003). *Differential Equations Linear, Nonlinear, Ordinary, and Partial*. New York: Cambridge University Press.

Mursita, D. (2009). *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains.

Purcell, E.J., Varberg, D., Rigdon, S.E. (2003). *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Purcell, E.J., Varberg, D., Rigdon, S.E. (2004). *Kalkulus Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Ricardo, H.J. (2009). *A Modern Introduction to Differential Equations Second Edition*. London: Elsevier Inc

Ross, S.L. (2004). *Differential Equations Third Edition*. Dehli: John Wiley and Sons.