

MU-1

**KONSEPSUDUT ANTARA DUA SUBRUANG DAN
POTENSIAPLIKASINYA**

Hendra Gunawan

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Bandung

1. PENDAHULUAN

Dalam makalah ini, konsep sudut antara dua subruang di suatu ruang vektor akan dibahas. Persisnya, diberikan dua himpunan vektor $\{u_1, \dots, u_p\}$ dan $\{v_1, \dots, v_q\}$ di suatu ruang hasil kali dalam berdimensi n , dengan $1 \leq p \leq q \leq n$, kita tertarik dengan besar sudut antara subruang yang direntang oleh $\{u_1, \dots, u_p\}$ dan subruang yang direntang oleh $\{v_1, \dots, v_q\}$.

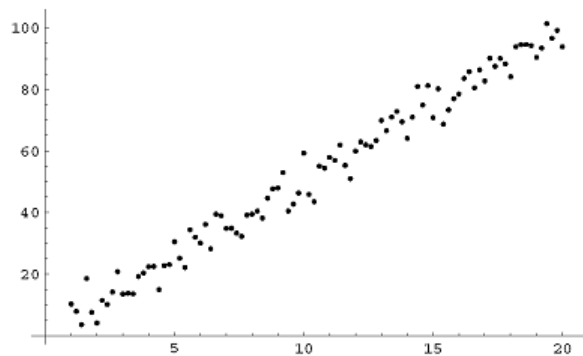
Dalam statistika, persoalan menghitung sudut antara dua subruang terkait erat dengan persoalan menghitung ukuran ketergantungan suatu himpunan peubah acak pada himpunan peubah acak lainnya. (Anderson, 1958) Penelitian tentang sudut antara dua subruang telah dilakukan oleh banyak peneliti, misalnya [(Solso, 1995), (Knyazev, 2002), (Rakočević, 2003), (Wimmer, 1999)]. Pada tahun 2001, I. Risteski dan K. Trenčevski mengumumkan rumus sudut antara dua subruang di ruang hasil kali dalam, dan membahas kaitannya dengan sudut kanonik (Risteski, 2001). Pada tahun 2005, H. Gunawan dkk menemukan kesalahan serius pada rumus tersebut dan memperbaikinya (Gunawan, 2005), dengan menggunakan konsep ruang norm-dan ruang hasil kali dalam- yang telah dipelajarinya sejak tahun 2000 (Gunawan, 2001), sebagaimana diungkapkan dalam makalah ini.

Rumus sudut antara dua subruang diperlukan oleh para peneliti dalam berbagai bidang, tidak hanya digunakan dalam matematika dan statistika tetapi juga dalam beberapa bidang lainnya, antara lain biokimia, fisika, grafika komputer, dan teknik elektro (khususnya vehicular technology).

2. REGRESI LINEAR; SUDUT ANTAR GARIS DAN SUBRUANG

Salah satu persoalan mendasar dalam statistika adalah persoalan *regresi linear*. Diberikan n titik data, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, ingin dicari suatu persamaany = $ax + b$ yang menghampiri data tersebut. Persamaan $y = ax + b$ merupakan persamaan suatu garis lurus.

Bila hanya terdapat dua titik (data), kita dapat memperoleh persamaan garis lurus yang melalui dua titik tersebut dengan mudah. Tetapi, dalam persoalan di atas, banyaknya data justru berlebih. Secara umum, sangat kecil kemungkinannya ditemukan suatu garis lurus yang melalui n titik sembarang, bila $n > 2$. Kita menyadari hal tersebut. Karena itu yang ingin dicari hanyalah persamaan garis lurus yang menghampiri data yang diberikan, dengan galat (*error*) sekecil-kecilnya.



Gambar 1. Regresi Linear

Persoalan regresi linear ini lazimnya diselesaikan dengan metode kuadrat terkecil, sebagai berikut. Galat penghampiran pada tiap titik adalah $\epsilon_i := y_i - (ax_i + b)$, $i = 1, \dots, n$. Bila kita kuadratkan masing-masing galat ini dan kemudian kita jumlahkan semuanya, kita peroleh galat total

$$\epsilon := \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Nilai ϵ dalam hal ini tergantung pada nilai koefisien a dan b . Tugas kita sekarang adalah menentukan koefisien a dan b sedemikian sehingga ϵ minimum. Dengan bantuan kalkulus, kita peroleh

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

dan

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}.$$

Dengan koefisien a dan b ini, persamaan $y = ax + b$ merupakan hampiran linear terbaik untuk data yang diberikan.

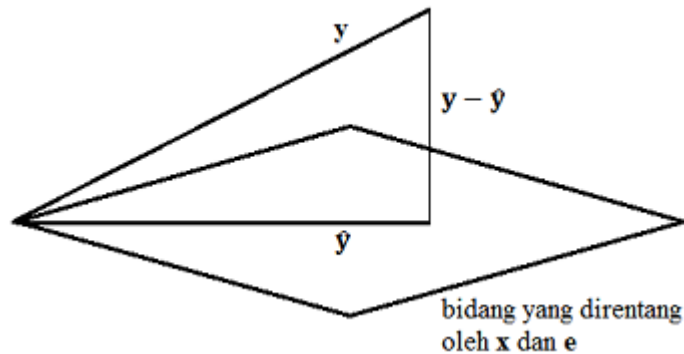
Persoalan mencari hampiran linear terbaik dapat pula ditinjau dengan menggunakan pendekatan aljabar dan geometri, sebagai berikut. Kita ingin menemukan koefisien a dan b sedemikian sehingga

$$y_i \approx ax_i + b, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sekarang tinjau vektor-vektor $y := (y_1, \dots, y_n)$, $x := (x_1, \dots, x_n)$, dan $e := (1, \dots, 1)$. Andaisaja y berada dalam subruang yang direntang oleh x dan e , maka $y = ax + be$ untuk suatu konstanta (skalar) a dan b tertentu, dan persoalan pun selesai. Tetapi, sebagai vektor dengan n entri, sangat kecil kemungkinan y berada dalam suatu subruang berdimensi dua, yang direntang oleh x dan e . Hal

yang mungkin dilakukan adalah mencari vektor $\hat{y} = ax + be$ dalam subruang yang direntang oleh x dan e yang merupakan hampiran terbaik untuk y .

Dalam hal ini, \hat{y} harus dipilih sedemikian sehingga $\|y - \hat{y}\|$ minimum. (Di sini, $\|v\|$ menyatakan besar atau panjang vektor v di ruang berdimensi n .) Secara geometri, vektor \hat{y} yang dicari adalah vektor proyeksi dari y terhadap bidang yang direntang oleh x dan e .



Gambar 2. Hampiran Linear Terbaik

Nilai koefisien a dan b dapat dicari dengan menggunakan sifat vektor komplement ortogonal dari \hat{y} , yaitu vektor $y^\perp = y - \hat{y}$. Vektor ini tidak hanya tegak lurus terhadap y , tetapi juga tegak lurus terhadap bidang yang direntang oleh x dan e . Khususnya, $y^\perp \perp x$ dan $y^\perp \perp e$.

Kedua persyaratan ini akan memberikan nilai a dan b yang kita kehendaki. Nilai a dan b tentu saja sama dengan yang diperoleh sebelumnya dengan pendekatan kalkulus. Namun, dengan pendekatan geometri, kita mempunyai informasi tambahan terkait dengan sudut antara vektor y dan vektor \hat{y} yang merupakan hampiran linear terbaiknya. Persisnya, vektor \hat{y} (dan kelipatannya) merupakan vektor pada bidang yang direntang oleh x dan e yang membentuk sudut terkecil dengan vektor y . Sudut terkecil tersebut tak lain merupakan sudut antara garis yang direntang oleh y dan bidang yang direntang oleh x dan e .

Masih terkait dengan data $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, dalam statistika kita mengenal koefisien korelasi yang menyatakan seberapa besar ketergantungannya (y_1, \dots, y_n) pada $x = (x_1, \dots, x_n)$. Nilai koefisien korelasi tersebut diberikan oleh rumus

$$r := \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2}}$$

Dengan menggunakan notasi vektor, rumus di atas dapat dinyatakan sebagai

$$r := \frac{\langle x - \bar{x}, y - \bar{y} \rangle}{\|x - \bar{x}\| \|y - \bar{y}\|}$$

dengan $\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ menyatakan nilai rata-rata dari $x_i, i = 1, \dots, n$, dan $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ menyatakan hasil kali dalam dari \mathbf{x} dan \mathbf{y} (Brown,1970). Koefisien korelasi antara \mathbf{x} dan \mathbf{y} dalam hal ini sama dengan nilai cosinus sudut antara vektor $\mathbf{x} - \hat{x}$ dan vektor $\mathbf{y} - \hat{y}$.

3. Rumus Risteski Dan Trencovski

Misalkan kita mempunyai dua himpunan vektor $\{u_1, \dots, u_p\}$ dan $\{v_1, \dots, v_q\}$ di suatu ruang hasil kali dalam X berdimensi n , dengan $1 \leq p \leq q \leq n$. (Mulai sekarang, vektor tidak lagi dituliskan dengan huruf tebal; sebagai contoh u_i adalah vektor di ruang berdimensi n , yakni $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{in}), i = 1, \dots, p$.) Bagaimanakah caranya menentukan sudut antara subruang V yang direntang oleh $\{v_1, \dots, v_p\}$ dan subruang yang direntang oleh $\{v_1, \dots, v_p\}$?

Persoalan ini dapat dipandang sebagai persoalan menentukan seberapa mirip himpunan ‘data’ $\{u_1, \dots, u_p\}$ dengan himpunan data $\{v_1, \dots, v_q\}$ (bila $p=q$), atau menghitung seberapa baik kita dapat menghampiri himpunan data $\{u_1, \dots, u_p\}$ dengan suatu himpunan anggota subruang yang direntang oleh $\{v_1, \dots, v_q\}$ (bila $p \leq q$). Dalam statistika, besar sudut antara dua subruang merupakan ukuran ketergantungan himpunan peubah acak pertama pada himpunan peubah acak kedua (Bergeson, 2000).

Sebagai gambaran, misalkan ada dua keluarga, sebutlah Keluarga Pak Urip dan Keluarga Pak Vicky, yang sama-sama memiliki dua anak, dan kita ingin membandingkan aktivitas kedua anak di Keluarga Pak Urip dengan aktivitas kedua anak di Keluarga Pak Vicky, katakanlah dalam membaca, bermusik, berenang, dan bersepeda. Masing-masing anak memberi skor 1, 2, 3, atau 4 pada keempat aktivitas tersebut, dengan skor 1 berarti jarang melakukan aktivitas tersebut dan skor 4 berarti sering melakukan aktivitas tersebut. Misalkan datanya adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Data Aktivitas Anak

Aktivitas	Keluarga Pak Urip		Keluarga Pak Vicky	
	Anak ke-1	Anak ke-2	Anak ke-1	Anak ke-2
Membaca	4	3	4	2
Bermusik	3	4	3	4
Berenang	2	2	1	2
Bersepeda	1	1	2	2

Dalam hal ini, kita mempunyai dua himpunan vektor, yaitu $U := \{(4,3,2,1), (3,4,2,1)\}$ dan $V := \{(4,3,1,2), (2,4,2,2)\}$. Bila kita dapat menghitung sudut antara subruang yang direntang oleh himpunan vektor U dan subruang yang direntang oleh himpunan vektor V , maka kita mempunyai suatu ukuran kemiripan aktivitas kedua anak di Keluarga U dengan aktivitas

kedua anak di Keluarga V . (Nanti setelah kita mempunyai rumus sudut antara duasubruang, kita akan melihat kembali contoh ini.)

Pada tahun 2001, Risteski dan Trenčevski (Risteski, 2001) mendefinisikan sudut θ antara subruang $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$ dan $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_q\}$ dengan rumus

$$\cos^2 \theta := \frac{\det(MM^T)}{\det[\langle u_i, u_j \rangle] \cdot \det[\langle v_k, v_l \rangle]} \tag{3.1}$$

dengan $M := [\langle u_i, v_k \rangle]$ adalah matriks berukuran $p \times q$ dan M^T menyatakan matrikstransposnya, $[\langle u_i, u_j \rangle]$ adalah matriks berukuran $p \times p$, dan $[\langle v_k, v_l \rangle]$ adalah matriks berukuran $q \times q$. Rumus tersebut mereka peroleh dengan terlebih dahulu membuktikan ketaksamaan berikut:

$$\det(MM^T) \leq \det[\langle u_i, u_j \rangle] \cdot \det[\langle v_k, v_l \rangle]. \tag{3.2}$$

Untuk $p = q = 1$, ketaksamaan di atas tak lain adalah ketaksamaan *Cauchy-Schwarz*, yang berbunyi

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Jadi ketaksamaan di atas merupakan perumuman dari ketaksamaan

Cauchy-Schwarz, yang menjamin bahwa nilai $\frac{\det(MM^T)}{\det[\langle u_i, u_j \rangle] \cdot \det[\langle v_k, v_l \rangle]}$ berada pada interval $[0, 1]$. Ini penting karena nilai $\cos^2 \theta$ harus berada pada interval tersebut.

Sekilas tidak ada yang mencurigakan dengan rumus (3.1) dan (3.2). Namun, ketika mempelajari bagaimana mereka membuktikan ketaksamaan (3.2), teramati suatu argumen yang rapuh. Mereka menyatakan bahwa ketaksamaan tersebut ‘invarian’ atau tidak berubah terhadap *operasi baris elementer*, kemudian mengasumsikan bahwa $\{u_1, \dots, u_p\}$ dan $\{v_1, \dots, v_q\}$ *ortonormal*. Padahal, pada kenyataannya, ketaksamaan tersebut hanya invarian terhadap operasi baris elementer pada $\{u_1, \dots, u_p\}$, tidak pada $\{v_1, \dots, v_q\}$, kecuali dalam kasus $p = q$. Singkat kata, ketaksamaan (3.2) hanya berlaku dalam kasus (a) $p = q$ atau (b) $\{v_1, \dots, v_q\}$ *ortonormal*. (Dalam kasus $p = q$, ketaksamaan (3.2) telah dibuktikan oleh S. Kurepa pada tahun 1966 (Kurepa, 1966).) Akibatnya, rumus (3.1) hanya berlaku pula dalam kedua kasus di atas. Di luar kedua kasus tersebut, bentuk hasil bagi di ruas kanan (3.1) dapat bernilai lebih besar daripada 1, yang tentunya tidak dapat menjadi nilai $\cos^2 \theta$.

Untuk melihat bahwa ketaksamaan (3.2) salah secara umum, ambillah sebagai contoh $X = \mathbb{R}^3$, yang dilengkapi dengan hasil kali dalam biasa, $U := \text{span}\{u\}$ dengan $u = (1, 0, 0)$, dan $V := \text{span}\{v_1, v_2\}$ dengan $v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ dan $v_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Menurut (3.2), kita seharusnya mempunyai

$$\langle u, v_1 \rangle^2 + \langle u, v_2 \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v_1, v_2\|^2,$$

dengan $\|v_1, v_2\| = \det [\langle v_k, v_l \rangle]$. Tetapi ruas kiri ketaksamaan ini sama dengan

$$\langle u, v_1 \rangle^2 + \langle u, v_2 \rangle^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

sementara ruas kanannya sama dengan

$$\|u\|^2 (\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2) = \frac{3}{8}.$$

Contoh sederhana ini memperlihatkan bahwa ketaksamaan (3.2) salah sekalipun dalam kasus $\{u_1, \dots, u_p\}$ ortonormal dan $\{v_1, \dots, v_q\}$ ortogonal (yang tidak terlalu jauh dari kondisi ortonormal).

Mengetahui adanya kesalahan pada rumus Risteski dan Trenčevski, penelitian ulang tentang sudut antara dua subruang dilakukan dengan menggunakan konsep norm- p dan hasil kali dalam- p yang telah dikenal dengan baik sebelumnya. Sebagai hasil dari penelitian tersebut, diperoleh rumus sudut antara dua subruang yang merupakan revisi dari rumus (3.1). Selain itu diperoleh pula perumusan ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* yang merupakan revisi dari ketaksamaan (3.2). Berbeda dengan pendekatan Risteski dan Trenčevski, ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* diperoleh sebagai akibat dari rumus sudut antara dua subruang terkait, bukan sebaliknya (Gunawan, 2005).

4. RUMUS SUDUT ANTARA DUA SUBRUANG - BAGIAN I

Misalkan X adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$, yang akan menjadi ruang semesta pembahasan kita selanjutnya. Diberikan dua subruang dari X , sebutlah U dan V , dengan dimensi p dan q berturut-turut, $1 \leq p \leq q \leq \dim(X)$. Sebelum kita sampai pada rumus sudut antara U dan V secara umum, marilah kita tinjau terlebih dahulu dua kasus khusus, yaitu

(a) $\dim(U) = 1, \dim(V) = q$ sembarang;

(b) $\dim(U) = \dim(V) = p \geq 2, \dim(U \cap V) = p - 1$.

Dalam kasus (a), sudut θ antara U dan V didefinisikan dengan rumus

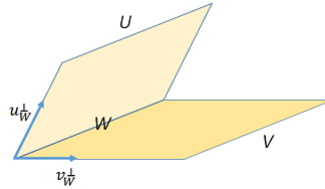
$$\cos^2 \theta = \frac{\langle u, u_V \rangle^2}{\|u\|^2 \|u_V\|^2} \quad (4.1)$$

Dengan u_V menyatakan vektor proyeksi (ortogonal) dari u pada V , dan $\|\cdot\| := \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ menyatakan norm pada X (yakni, $\|v\|$ menyatakan panjang vektor v). (Ada dua nilai θ yang memenuhi persamaan di atas, tetapi kita akan mengambil nilai $\theta \in [0, \pi/2]$.)

Dalam kasus (b), misalkan $U = \text{span}\{u, w_2, \dots, w_p\}$ dan $V = \text{span}\{u, w_2, \dots, w_p\}$, dengan $p \geq 2$. Misalkan $W := U \cap V = \text{span}\{w_2, \dots, w_p\}$. Sudut θ antara U dan V dalam hal ini didefinisikan dengan rumus

$$\cos^2 \theta = \frac{\langle u_W^\perp, v_W^\perp \rangle^2}{\|u_W^\perp\|^2 \|v_W^\perp\|^2} \quad (4.2)$$

dengan u menyatakan vektor komplement ortogonal dari u pada V , berturut-turut, pada U (lihat ilustrasi di bawah ini).



Gambar 3. Sudut Antara Dua Subruang yang Beririsan

Perhatikan bahwa ada kesamaan di antara kedua kasus di atas. Dalam kasus (a), kita dapat menuliskan $u = u_V + u_V^\perp$ dengan u_V^\perp adalah vektor komplement ortogonal dari u pada V . Dalam hal ini, rumus (4.1) menjadi

$$\cos^2 \theta = \frac{\|u_V\|^2}{\|u\|^2},$$

yang memperlihatkan bahwa nilai $\cos \theta$ sama dengan rasio antara panjang vektor proyeksi u pada V dan panjang vektor u . Serupa dengan itu, dalam kasus (b), kita juga dapat memeriksa bahwa nilai $\cos \theta$ sama dengan rasio antara volume paralelepipedum berdimensi p yang direntang oleh vektor-vektor proyeksi u, w_2, \dots, w_p pada V dan volume paralelepipedum berdimensi p yang direntang oleh vektor-vektor u, w_2, \dots, w_p (Untuk $p = 2$, paralelepipedum berdimensi 2 adalah jajar genjang.)

Berdasarkan pengamatan di atas, kita dapat mendefinisikan sudut antara subruang $U := \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$ dan subruang $V := \text{span}\{v_1, \dots, v_q\}$, dengan $p \leq q$ sedemikian sehingga nilai cosinus-nya sama dengan rasio antara volume paralelepipedum berdimensi p yang direntang oleh vektor-vektor proyeksi u_1, \dots, u_p pada V dan paralelepipedum berdimensi p yang direntang oleh vektor-vektor u_1, \dots, u_p . Menggunakan notasi *norm-p* biasa, volume paralelepipedum berdimensi p yang direntang oleh vektor-vektor u_1, \dots, u_p dituliskan sebagai $\|u_1, \dots, u_p\|$. Sudut θ antara subruang $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_p\}$ dan subruang $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_q\}$ dari X (dengan $p \leq q$) dalam hal ini diberikan oleh rumus

$$\cos^2 \theta := \frac{\|\text{proj}_V u_1, \dots, \text{proj}_V u_p\|^2}{\|u_1, \dots, u_p\|^2}, \tag{4.3}$$

dengan $\text{proj}_V u_i$ menyatakan vektor proyeksi dari u_i pada V . Jelas bahwa rasio ini merupakan suatu bilangan di interval $[0,1]$. Lebih jauh, kita dapat membuktikan bahwa nilai rasio tersebut invarian atau tidak berubah terhadap perubahan basis untuk U dan V , sehingga kita mempunyai definisi yang ajek untuk sudut antara dua subruang.

Proposisi. Rasio di ruas kanan (4.3) merupakan suatu bilangan di interval $[0,1]$ dan tidak tergantung pada pemilihan basis untuk U dan V .

Bukti. Pertama catat bahwa vektor proyeksi dari u_i pada V tidak tergantung pada pemilihan basis untuk V . Selanjutnya, karena operator proyeksi merupakan *transformasi linear*, rasio di ruas kanan (4.3) invarian terhadap perubahan basis untuk U . Persisnya, nilai rasio tersebut tidak berubah apabila kita (a) menukar u_i dan u_j , (b) mengganti u_i dengan $u_i + \alpha u_j$, atau (c) mengganti u_i dengan αu_i untuk suatu $\alpha \neq 0$.

Kedua, dengan mengasumsikan bahwa himpunan $\{u_1, \dots, u_p\}$ ortonormal, kita mempunyai $\|u_1, \dots, u_p\| = 1$ dan $\|\text{proj}_V u_1, \dots, \text{proj}_V u_p\| \leq 1$ sebab $\|\text{proj}_V u_i\| \leq \|u_i\| = 1$ untuk setiap $i = 1, \dots, p$. (Volume paralelepipedium yang panjang rusuk-rusuknya lebih kecil daripada atau sama dengan 1 pasti lebih kecil daripada atau sama dengan 1.) Jadi, nilai rasio tersebut merupakan suatu bilangan di interval $[0, 1]$. \square

5. RUMUS SUDUT ANTARA DUA SUBRUANG - BAGIAN II

Untuk mendalami rumus sudut antara dua subruang lebih lanjut, kita perlu berkenalan lebih akrab dengan konsep ruang hasil kali dalam- p dan ruang norm- p [10, 11]. Misalkan X adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Fungsi atau pemetaan $\langle \cdot, \cdot \mid \cdot, \dots, \cdot \rangle$ pada X^{p+1} yang dinyatakan dengan rumus

$$\langle x_0, x_1 \mid x_2, \dots, x_p \rangle := \begin{vmatrix} \langle x_0, x_1 \rangle & \langle x_0, x_2 \rangle & \dots & \langle x_0, x_p \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_p, x_1 \rangle & \langle x_p, x_2 \rangle & \dots & \langle x_p, x_p \rangle \end{vmatrix}$$

disebut sebagai *hasil kali dalam- p* pada X , sementara pemetaan $\|x_1, x_2, \dots, x_p\| := \langle x_1, x_1 \mid x_2, \dots, x_p \rangle^{1/2}$ pada X^p disebut sebagai *norm- p* yang diinduksi oleh $\langle \cdot, \cdot \mid \cdot, \dots, \cdot \rangle$ pada X . Nilai $\|x_1, x_2, \dots, x_p\|^2$ dalam hal ini sama dengan *determinan Gram* yang terkait dengan vektor-vektor x_1, x_2, \dots, x_p (Susanti, 2013), yakni $\|x_1, x_2, \dots, x_p\|^2 = \det [\langle x_i, x_j \rangle]$. Secara geometri, $\|x_1, \dots, x_p\|$ menyatakan volume paralelepipedium berdimensi p yang direntang oleh x_1, \dots, x_p .

Beberapa sifat mendasar hasil kali dalam- p adalah bahwa ia bersifat *bilinear* dan komutatif untuk dua variabel pertama (karena itu dua variabel pertama dipisahkan dari variabel lainnya dengan tanda $|$ bukannya dengan tanda koma). Selain itu, $\langle x_0, x_1 \mid x_2, \dots, x_p \rangle = \langle x_0, x_1 \mid x_{i_2}, \dots, x_{i_p} \rangle$ untuk sembarang permutasi $\{i_2, \dots, i_p\}$ dari $\{2, \dots, p\}$. Lebih jauh, dengan menggunakan sifat determinan Gram, kita mempunyai $\|x_1, \dots, x_p\| \geq 0$ dan $\|x_1, \dots, x_p\| = 0$ jika dan hanya jika x_1, \dots, x_p bergantung linear. Seperti halnya untuk hasil kali dalam, terdapat *ketaksamaan Cauchy-Schwarz* untuk hasil kali dalam- p :

$$\langle x_0, x_1 \mid x_2, \dots, x_p \rangle^2 \leq \|x_0, x_2, \dots, x_p\|^2 \|x_1, x_2, \dots, x_p\|^2$$

untuk setiap x_0, x_1, \dots, x_p . Selain itu, berlaku pula *ketaksamaan Hadamard*:

$$\|x_1, x_2, \dots, x_p\| \leq \|x_1\| \|x_2\| \cdots \|x_p\|$$

untuk setiap x_1, x_2, \dots, x_p . (Secara geometri, ketaksamaan Hadamard menyatakan bahwa volume paralelepipedium berdimensi- takkan lebih besar daripada hasil kali panjang rusuk-rusuknya.)

Selanjutnya perhatikan bahwa $\langle x_0, x_1+x_1^\perp | x_2, \dots, x_p \rangle = \langle x_0, x_1 | x_2, \dots, x_p \rangle$ untuk sembarang kombinasi linear x_1' dari x_2, \dots, x_p . Jadi, misalnya, untuk $i = 0$ dan 1 , kita dapat menuliskan $x_1 = x_1^* + x_1^\perp$ dengan x_1^* menyatakan vektor proyeksi dari x_1 pada span $\{x_2, \dots, x_p\}$ dan x_1^\perp adalah vektor komplemen ortogonalnya, untuk mendapatkan

$$\langle x_0, x_1 | x_2, \dots, x_p \rangle = \langle x_0^*, x_1^* | x_2, \dots, x_p \rangle = \langle x_0^*, x_1^* \rangle \|x_2, \dots, x_p\|^2.$$

(Di sini, $\|x_2, \dots, x_p\|^2$ menyatakan volume paralelepipedium berdimensi $p - 1$ yang direntang oleh x_2, \dots, x_p .) Fakta inilah yang berada di balik rumus (4.2) yang terkait dengan sudut antara dua subruang berdimensi yang beririsan pada suatu subruang berdimensi $p - 1$.

Menggunakan hasil kali dalam- r dan norm- r , kita juga dapat memperoleh rumus untuk vektor proyeksi dari sembarang vektor x pada subruang yang direntang oleh x_1, \dots, x_r . Persisnya, misalkan $x^* = \sum_{k=1}^r \alpha_k x_k$ adalah vektor x proyeksi dari pada span $\{x_1, \dots, x_r\}$.

Dengan menghitung hasil kali dalam dari x^* dan x_l untuk $l = 1, \dots, r$, kita peroleh sistem persamaan linear:

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k \langle x_k, x_l \rangle = \langle x^*, x_l \rangle = \langle x, x_l \rangle, \quad l = 1, \dots, r.$$

Dengan Aturan Cramer, sifat-sifat hasil kali dalam dan determinan, kita dapatkan

$$\alpha_k = \frac{\langle x, x_k | x_{i_2(k)}, \dots, x_{i_r(k)} \rangle}{\|x_1, x_2, \dots, x_r\|^2}$$

dengan $\{i_2(k), \dots, i_r(k)\} = \{1, 2, \dots, r\} \setminus \{k\}$, $k = 1, 2, \dots, r$.

Hasil di atas memungkinkan kita menyatakan rumus sudut antara subruang U yang direntang oleh $\{u_1, \dots, u_p\}$ dan subruang V yang direntang oleh $\{v_1, \dots, v_q\}$, dengan $p \leq q$, dalam bentuk yang lebih eksplisit. Persisnya, untuk $i = 1, \dots, p$, vektor proyeksi dari u_i pada V dapat dituliskan sebagai

$$\text{proj}_V u_i = \sum_{k=1}^q \alpha_{ik} v_k$$

dengan

$$\alpha_{ik} = \frac{\langle u_i, v_k | v_{i_2(k)}, \dots, v_{i_q(k)} \rangle}{\|v_1, v_2, \dots, v_q\|^2}$$

dengan $\{i_2(k), \dots, i_q(k)\} = \{1, 2, \dots, q\} \setminus \{k\}$, $k = 1, 2, \dots, q$. Selanjutnya amati bahwa

$$\langle \text{proj}_V u_i, \text{proj}_V u_j \rangle = \langle u_i, \text{proj}_V u_j \rangle = \sum_{k=1}^q \alpha_{jk} \langle u_i, v_k \rangle$$

untuk $i, j = 1, \dots, p$. Karena itu kita peroleh

$$\| \text{proj}_V u_1, \dots, \text{proj}_V u_p \|^2 = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^q \alpha_{1k} \langle u_1, v_k \rangle & \dots & \sum_{k=1}^q \alpha_{pk} \langle u_1, v_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^q \alpha_{1k} \langle u_p, v_k \rangle & \dots & \sum_{k=1}^q \alpha_{pk} \langle u_p, v_k \rangle \end{vmatrix} = \frac{\det (M \tilde{M}^T)}{\| v_1, \dots, v_q \|^2}$$

dengan

$$M := [\langle u_i, v_k \rangle] \quad \text{and} \quad \tilde{M} := [\langle u_i, v_k | v_{i_2(k)}, \dots, v_{i_q(k)} \rangle] \quad (5.1)$$

$i_2(k), \dots, i_q(k)$ seperti di atas. (Catat bahwa M dan \tilde{M} merupakan matriks berukuran $p \times q$, sehingga $M \tilde{M}^T$ berukuran $p \times p$.) Dengan demikian rumus (4.3) untuk cosinus sudut antara U dan V dapat dituliskan sebagai

$$\cos^2 \theta = \frac{\det (M \tilde{M}^T)}{\det [\langle u_i, u_j \rangle] \cdot \det^p [\langle v_k, v_l \rangle]} \quad (5.2)$$

Rumus ini merupakan koreksi terhadap rumus (3.1) dari Risteski dan Trenčevski, sebagaimana telah dipublikasikan di [12]. Perhatikan jika $\{v_1, \dots, v_q\}$ ortonormal, maka $\det [\langle v_k, v_l \rangle] = 1$ dan $\tilde{M} = M$, sehingga rumus (5.2) dapat disederhanakan menjadi

$$\cos^2 \theta = \frac{\det (M M^T)}{\det [\langle u_i, u_j \rangle]} \quad (5.3)$$

Lebih jauh, jika $\{u_1, \dots, u_p\}$ juga ortonormal, maka rumus (5.3) menjadi $\cos^2 \theta = \det (M M^T)$.

Khususnya, jika $p = q$, maka $\det (M M^T) = \det M \cdot \det M^T = \det^2 M$, sehingga dari rumus terakhir kita peroleh $\cos \theta = |\det M|$. (Jadi, dalam kasus $p = q$, kita dapat menghitung sudut antara dua subruang dengan terlebih dahulu melakukan proses ortonormalisasi pada kedua himpunan vektor terkait, lalu menghitung determinan matriks berisi hasil kali dalam vektor-vektor hasil ortonormalisasi.)

Sebagai konsekuensi dari rumus (5.2), kita peroleh ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* yang merupakan koreksi dari ketaksamaan (5.3), yaitu:

Proposisi. Untuk dua himpunan vektor sembarang $\{u_1, \dots, u_p\}$ dan $\{v_1, \dots, v_q\}$ di dengan $p \leq q$, berlaku ketaksamaan

$$\det (M \tilde{M}^T) \leq \det [\langle u_i, u_j \rangle] \cdot \det^p [\langle v_k, v_l \rangle],$$

dengan M dan \tilde{M} matriks $p \times q$ pada persamaan (5.1). Lebih jauh, kesamaan berlaku jika dan hanya jika subruang yang direntang oleh $\{u_1, \dots, u_p\}$ termuat dalam subruang yang direntang oleh $\{v_1, \dots, v_q\}$.

6. POTENSI APLIKASI

Terkait dengan rumus sudut antara dua subruang (di ruang hasil kali dalam), terdapat beberapa potensi aplikasi yang dapat dikemukakan di sini. Aplikasi pertama, sebagaimana telah disinggung di bagian depan, adalah dalam bidang statistika.

Lihat kembali Tabel 1 tentang aktivitas anak-anak di keluarga Pak Urip dan Pak Vicky. Sekilas tampak bahwa aktivitas anak-anak di kedua keluarga tersebut mirip, tetapi pertanyaannya adalah: seberapa mirip? Di sini, kita berhadapan dengan dua subruang dari ruang berdimensi 4, yaitu $U := \text{span}\{(4,3,2,1), (3,4,2,1)\}$ dan $V := \text{span}\{(4,3,1,2), (2,4,2,2)\}$. Walau sederhana, kita tidak dapat menggambar empat vektor yang *bebas linear* (di ruang berdimensi 4), sehingga kita tidak dapat membayangkan seberapa besar sudut antara U dan V ; karena itu kita perlu bersandar pada rumus sudut antara dua subruang yang telah kita periksa keajekannya. Untuk contoh ini kita peroleh nilai cosinus sudut antara U dan V sama dengan 0,853. Dengan demikian, sudut antara U dan V adalah $31,5^\circ$, yang relatif kecil (lebih kecil daripada 45°). Dengan sudut sebesar ini, kita dapat mengatakan bahwa aktivitas anak-anak di kedua keluarga tersebut mirip.

Hasil yang berbeda akan kita peroleh bila kita bandingkan aktivitas kedua anak di Keluarga Pak Urip dengan aktivitas kedua anak di keluarga Pak Wijaya, yang datanya diberikan dalam tabel di bawah ini.

Aktivitas	Keluarga Pak Urip		Keluarga Pak Wijaya	
	Anak ke-1	Anak ke-2	Anak ke-1	Anak ke-2
Membaca	4	3	1	2
Bermusik	3	4	2	1
Berenang	2	2	3	4
Bersepeda	1	1	4	3

Tabel 2. Data Aktivitas Anak

Nilai cosinus sudut antara subruang $U := \text{span}\{(4,3,2,1), (3,4,2,1)\}$ dan subruang $W := \text{span}\{(1,2,3,4), (2,1,4,3)\}$ sama dengan 0,507. Dengan demikian, sudut antara U dan W adalah $59,5^\circ$. Dengan sudut yang lebih besar daripada 45° , kita akan mengatakan bahwa aktivitas kedua anak di Keluarga Pak Urip berbeda dengan aktivitas kedua anak di Keluarga Pak Wijaya.

Aplikasi lebih lanjut dalam statistika perlu dijajagi oleh para statistikawan. Aplikasi lainnya dari rumus sudut antara dua subruang dapat ditemukan dalam bidang matematika lainnya, khususnya dalam bidang teori kontrol [(Haesen, 2009), (Pustylnik, 2010)]. Aplikasi dalam bidang fisika dapat ditemukan di [(Bosetti, 2010), (Chella, 2012)], sementara aplikasi dalam bidang biokimia dapat ditemukan di [(David, 2011), (David, 2014)]. Area aplikasi yang lebih menjanjikan adalah dalam bidang grafika komputer (yang terkait dengan pemrosesan citra), seperti dapat dipelajari di [(Cao, 2014),

(Kaveh,2012), (Kaveh, 2011), (Liwicki, 2013), (Liwicki, 2015), (Peikert, 2008)]. Selain itu, aplikasi dalam bidang teknik elektro, khususnya *vehicular technology*, dapat ditemukan di [(Nam, 2013), (Nam, 2014), (Yi, X, 2011)].

Akhir kata, dalam sepakbola, ada penjaga gawang, pemain belakang, pemain tengah, dan pemain depan atau penyerang. Dalam matematika, menemukan rumus adalah pekerjaan pemain belakang. Setelah sebuah rumus ditemukan, 'bola' pun bergulir ke lapangan tengah, dan selanjutnya pemain tengah dan pemain depan lah yang diharapkan mengutak-atik 'bola' tersebut, sebelum akhirnya mencetak 'gol'. Terkait dengan rumus sudut antara dua subruang yang dibahas di sini, beberapa peneliti asing telah memanfaatkannya untuk berbagai keperluan, sebagaimana dirujuk di atas. Ke depan kita berharap para peneliti asal Indonesia yang 'bermain di lapangan tengah dan depan' dapat pula memanfaatkan hasil-hasil penelitian dari para 'pemain belakang', yang berkiprah dalam bidang ilmu dasar. Sebaliknya, tentunya, para peneliti dalam bidang ilmu dasar juga siap mengumpan hasil - hasil penelitian yang ditunggu oleh peneliti dalam bidang ilmu terapan, sekiranya memang diperlukan. Dengan bersinergi, niscaya kita dapat membuahakan 'gol' indah yang kita rindukan.

7. DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, T.W. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., NewYork (1958).
- Bosetti, H., dkk. "Time-reversal symmetry and covariant Lyapunov vectors for simple particlemodels in and out of thermal equilibrium." *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and SoftMatter Physics* (2010).
- Brown, A.L. & Page, A. *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand Reinhold Co., London(1970).
- Cao, W.M., dkk. "Content-based image retrieval using high-dimensional information geometry." *Science China Information Sciences* (2014).
- Chella, F., dkk. "Calibration of a multichannel MEG system based on the Signal Space Separationmethod." *Physics in Medicine and Biology* (2012).
- David, C.C. & Jacobs, D.J. "Characterizing protein motions from structure." *Journal of MolecularGraphics and Modelling* (2011).
- David, C.C. & Jacobs, D.J. "Principal component analysis: A method for determining the essentialdynamics of proteins." *Methods in Molecular Biology* (2014).
- S. Fedorov, "Angle between subspaces of analytic and antianalytic functions in weighted 2 spaceon a boundary of a multiply connected domain," in *Operator Theory, System Theory and RelatedTopics*. Beer-Sheva/Rehovot (1997), 229–256.
- Gantmacher, F.R. *The Theory of Matrices*, Vol. I, Chelsea Publishing Co., New York (1960), 247–256.
- Gunawan, H. "On n -normed spaces." *International Journal of Mathematics and MathematicalSciences* (2001).

- Gunawan, H. "On n -inner products, n -norms, and the *Cauchy-Schwarz* inequality." *Scientiae Mathematicae Japonica* (2001), 47–54.
- Gunawan, H., Neswan, O. & Setya-Budhi, W. "A formula for angles between two subspaces of inner product spaces." *Beiträge zur Algebra und Geometrie* (2005).
- Haesen, S., dkk. "On the extrinsic principal directions of Riemannian submanifolds." *Note di Matematica* (2009).
- Kaveh, A. *Optimal Analysis of Structures by Concepts of Symmetry and Regularity*. Springer-Verlag, Wien (2013).
- Kaveh, A. & Fazli, H. "Approximate eigensolution of locally modified regular structures using a substructuring technique." *Computers and Structures* (2011).
- Knyazev, A.V. & Argentati, M.E. "Principal angles between subspaces in an A -based scalar product: algorithms and perturbation estimates." *SIAM Journal on Scientific Computing* (2002), 2008–2040.
- Kurepa, S. "On the Buniakowsky-*Cauchy-Schwarz* inequality." *Glasnik Matematički Series III* (21) (1966), 147–158.
- Liwicki, S., dkk. "Euler principal component analysis." *International Journal of Computer Vision* (2013).
- Liwicki, S., dkk. "Online kernel slow feature analysis for temporal video segmentation and tracking." *IEEE Transactions on Image Processing* (2015).
- Nam, S., dkk. "A PF scheduling with low complexity for downlink multi-user MIMO systems." *IEEE Vehicular Technology Conference* (2013).
- Nam, S., dkk. "A user selection algorithm using angle between subspaces for downlink MU-MIMO systems." *IEEE Transactions on Communications* (2014).
- Peikert, R. & Sadlo, F. "Height ridge computation and filtering for visualization." *IEEE Pacific Visualisation Symposium 2008, Pacific Vis - Proceedings* (2008).
- Pustylnik, E., dkk. "Convergence of infinite products of nonexpansive operators in Hilbert space." *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* (2010).
- Rakočević, V. & Wimmer, H.K. "A variational characterization of canonical angles between subspaces." *Journal of Geometry* (2003), 122–124.
- Risteski, I.B. & Trenčevski, K.G. "Principal values and principal subspaces of two subspaces of vector spaces with inner product." *Beiträge zur Algebra und Geometrie* (2001), 289–300.
- Wimmer, H.K. "Canonical angles of unitary spaces and perturbations of direct complements." *Linear Algebra & Applications* (1999), 373–379.
- Yi, X. & Au, E.K.S. "User scheduling for heterogeneous multiuser MIMO systems: A subspace viewpoint." *IEEE Transactions on Vehicular Technology* (2011).