

## **BAYESIAN UPDATING UNTUK PREDIKSI SETTLEMENT KONSOLIDASI MENGUNAKAN INDEKS KOMPRESI DAN RASIO PORI PROBABILISTIK**

**Ivindra Pane<sup>1\*</sup>, Rusandi Noor<sup>1</sup>, Ulwiyah Wahdah M Liana<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Prodi Teknik Sipil, Universitas Muhammadiyah Kalimantan Timur  
Samarinda, Kalimantan Timur

\*Email: izp329@umkt.ac.id

### **Abstrak**

Prediksi settlement konsolidasi menggunakan persamaan Terzaghi secara konvensional dilakukan secara deterministik, padahal parameter utama indeks kompresi  $C_c$  dan rasio pori awal  $e_0$  mengandung ketidakpastian signifikan ketika diperoleh melalui korelasi empiris. Makalah ini menyajikan kerangka probabilistik berbasis pembaruan Bayesian untuk prediksi settlement konsolidasi. Distribusi prior kedua parameter diturunkan dari korelasi Skempton (1944) dengan memperlakukan batas cair (LL) sebagai variabel acak berdistribusi normal. Propagasi ketidakpastian dilakukan dengan metode first-order second-moment (FOSM) yang mempertimbangkan kovarians antar-parameter. Distribusi posterior diperoleh secara analitis menggunakan sifat konjugat Gaussian. Permasalahan dibatasi pada lempung terkonsolidasi normal (NC). Dua studi kasus pada lempung lunak di Jakarta dan Surabaya menunjukkan reduksi standar deviasi prediksi settlement sebesar 52–56% hanya dengan tiga hingga empat sampel oedometer, menegaskan nilai kuantitatif investigasi tanah dalam mengurangi risiko desain pondasi.

**Kata kunci:** rasio pori; Bayesian; FOSM; indeks kompresi; settlement konsolidasi

### **Abstract**

*Consolidation settlement prediction using Terzaghi's equation is conventionally performed deterministically, yet the primary parameters compression index  $C_c$  and initial void ratio  $e_0$  carry significant uncertainty when derived from empirical correlations. This paper presents a Bayesian updating framework wherein prior distributions are elicited from Skempton's (1944) correlation by treating liquid limit as a normally distributed random variable. Uncertainty is propagated to settlement using the first-order second-moment (FOSM) method accounting for parameter covariance. Analytical posterior distributions are obtained via Gaussian conjugate updating when oedometer test data become available. Two Indonesian soft clay case studies demonstrate 52–56% reductions in settlement prediction uncertainty from three to four oedometer specimens.*

**Keywords:** Bayesian; compression index; consolidation settlement; FOSM; void ratio

## **1. PENDAHULUAN**

Prediksi penurunan tanah (*settlement*) konsolidasi merupakan salah satu aspek paling kritis dalam rekayasa pondasi di atas tanah lunak. Kesalahan prediksi dapat mengakibatkan kerusakan struktural, gangguan fungsional bangunan, dan biaya perbaikan yang sangat besar. Persamaan konsolidasi Terzaghi untuk lempung *normally consolidated* (NC) adalah:

$$S_c = \frac{C_c \cdot H}{1 + e_0} \cdot \log_{10} \left( \frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{v0}} \right) \quad (1)$$

dengan:

$S_c$  = *settlement* konsolidasi (mm)

$C_c$  = indeks kompresi

$H$  = tebal lapisan yang terkonsolidasi (m)

$e_0$  = rasio pori awal

$\sigma'_{v0}$  = tegangan efektif vertikal awal (kPa)

$\sigma'_{vf} = \sigma'_{v0} + \Delta\sigma'$  = tegangan efektif vertikal akhir setelah ada pembebanan  $\Delta\sigma'$  (kPa)

Studi ini dibatasi pada kondisi lempung *normally consolidated* (NC) dimana pengaruh tegangan pra-konsolidasi  $\sigma'_c$  kecil sehingga tidak/kurang berpengaruh.

Dalam praktik, parameter  $C_c$  dan  $e_0$  umumnya diperoleh melalui dua cara: (1) korelasi empiris dengan batas cair atau *liquid limit* (LL) (cepat dan ekonomis namun mengandung ketidakpastian ganda, yaitu variabilitas natural properti indeks tanah dan dispersi residual model korelasi); atau (2) pengujian oedometer

langsung di laboratorium (lebih akurat namun memerlukan waktu, biaya dan sampel *undisturbed* berkualitas). Dalam kondisi investigasi terbatas, insinyur sering hanya memiliki data Atterberg tanpa pengujian oedometer, sehingga parameter diambil dari korelasi semata. Hal ini menghasilkan estimasi deterministik tunggal yang tidak mencerminkan ketidakpastian yang sesungguhnya.

Phoon dan Kulhawy (1999) mendokumentasikan bahwa koefisien variasi (COV) untuk  $C_c$  yang diperoleh dari korelasi berkisar 25–40%, sedangkan COV untuk  $e_0$  berkisar 20–30%. Ketidakpastian sebesar ini menghasilkan interval prediksi settlement yang sangat lebar.

Kerangka inferensi Bayesian menawarkan solusi matematis yang konsisten: pengetahuan awal tentang parameter (*prior*) distribusi probabilitas yang diturunkan dari korelasi empiris, kemudian diperbarui secara formal (*update*) ketika data pengujian baru tersedia melalui *likelihood function*, menghasilkan distribusi *posterior* yang mencerminkan gabungan informasi. Ang dan Tang (1975) meletakkan fondasi pendekatan ini dalam rekayasa sipil. Cao dkk. (2016) menerapkannya pada karakterisasi parameter geoteknik, dan Christian dkk. (1994) memperlihatkan relevansinya dalam analisis keandalan geoteknik. Kedua penelitian ini belum secara spesifik menerapkan inferensi Bayesian dalam analisis *settlement* tanah.

Makalah ini bertujuan untuk: (1) merumuskan distribusi prior untuk  $C_c$  dan  $e_0$  secara eksplisit dari korelasi empiris Skempton (1944) dengan memperlakukan LL sebagai variabel acak; (2) mempropagasikan ketidakpastian parameter ke prediksi settlement menggunakan metode FOSM yang mempertimbangkan kovarians; (3) mendapatkan distribusi posterior secara analitis menggunakan sifat konjugat Gaussian; dan (4) memvalidasi kerangka ini melalui dua studi kasus lempung lunak di Indonesia dengan mengkuantifikasi manfaat data oedometer terhadap pengurangan ketidakpastian prediksi.

## 2. METODOLOGI

Metodologi dikembangkan dalam empat tahap yang saling berkaitan secara logis. Tabel 1 merangkum kesembilan langkah operasional sebagai panduan praktis. Subbab-subbab berikut menjelaskan dasar teoritis setiap tahap dengan urutan yang mengikuti alur pikir dari konsep ke implementasi.

Tabel 1. Langkah-langkah analisis pembaruan Bayesian untuk prediksi *settlement* konsolidasi

Langkah	Aktivitas	Keterangan
1	Pengumpulan data indeks	Uji Atterberg ( $LL$ ) minimal 6 sampel per lapisan; catat $\mu_{LL}$ dan $\sigma_{LL}$
2	Pembentukan prior $C_c$	Hitung <i>mean</i> $\mu_{C_c}$ dan standar deviasi $\sigma_{C_c}$ menggunakan Persamaan (7) dan (8); tetapkan $\sigma_{e,C_c} \approx 0,07$ yaitu model error dari korelasi Skempton di Persamaan (6)
3	Pembentukan prior $e_0$	Tentukan <i>mean</i> $\mu_{e_0}$ dan standar deviasi $\sigma_{e_0}$ dari data bor/kadar air; hitung $\sigma_{e_0, total}^2$ dari Persamaan (10)
4	Estimasi kovarians	Tetapkan koefisien korelasi Pearson $\rho = 0,5-0,75$ (lempung anorganik) atau dari regresi data setempat; hitung Cov ( $C_c, e_0$ ) dari Persamaan (11)
5	Hitung prior $S_c$	Terapkan FOSM Persamaan (12)–(15b); verifikasi COV $C_c$ dan $e_0 \leq 20\%$
6	Uji oedometer	Ambil $n$ sampel <i>undisturbed</i> ; ukur $C_{c, obs}$ dan $e_{0, obs}$ ; estimasi $\sigma_{e, meas}$ dari pengulangan pengujian
7	Pembaruan Bayesian	Terapkan Persamaan (18)–(19) untuk $C_c$ dan $e_0$ secara terpisah; peroleh $\mu_n$ dan $\sigma_n$ masing-masing parameter
8	Posterior $S_c$	Substitusi $\mu_n$ dan $\sigma_n$ ke FOSM; hitung $\mu_{S_c, post}$ , $\sigma_{S_c, post}$ , dan <i>confidence interval</i> CI 95%
9	Interpretasi	Bandingkan CI posterior dengan nilai batas izin $S_{allow}$ ; evaluasi kebutuhan pengujian tambahan

### 2.1. Distribusi Probabilitas sebagai Representasi Ketidakpastian

Dalam rekayasa geoteknik, parameter tanah seperti indeks kompresi  $C_c$  bervariasi dari satu titik ke titik lain pada lapisan yang sama. Pengujian pada sepuluh sampel dari satu lapisan akan menghasilkan sepuluh nilai yang berbeda. Daripada memilih satu nilai tunggal yang “dianggap mewakili” — yang mengabaikan variabilitas ini — kerangka yang diusulkan memodelkan ketidakpastian tersebut secara eksplisit sebagai distribusi probabilitas.

Distribusi yang digunakan adalah distribusi normal (Gaussian) atau kurva distribusi berbentuk lonceng simetris yang sepenuhnya ditentukan oleh dua parameter: mean  $\mu$  (nilai tengah, estimasi terbaik dari parameter) dan standar deviasi  $\sigma$  (lebar kurva, ukuran ketidakpastian). Untuk variabel acak  $X$ :

$$X \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma^2) \quad (2)$$

Fungsi kepadatan probabilitasnya:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3)$$

Sifat utama yang dimanfaatkan dalam analisis ini adalah aturan 95%: sekitar 95% nilai dari suatu distribusi normal jatuh dalam rentang  $[\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]$ . Rentang ini disebut interval kredibel 95%, yang merupakan representasi langsung dari ketidakpastian prediksi. Pemilihan distribusi normal didasarkan pada tiga pertimbangan: (1) properti geoteknik umumnya mendekati distribusi simetris; (2) kombinasi linear variabel normal juga berdistribusi normal; dan (3) menghasilkan solusi analitis yang efisien sebagaimana dijelaskan pada Subbab 2.4.

## 2.2. Kerangka Pembaruan Bayesian

Sebelum menjabarkan persamaan teknis, penting untuk memahami logika yang mendasari seluruh kerangka ini. Inferensi Bayesian menjawab pertanyaan berikut: bagaimana kepercayaan kita terhadap nilai suatu parameter berubah ketika data baru tersedia?

Kerangka Bayesian bekerja dengan tiga elemen:

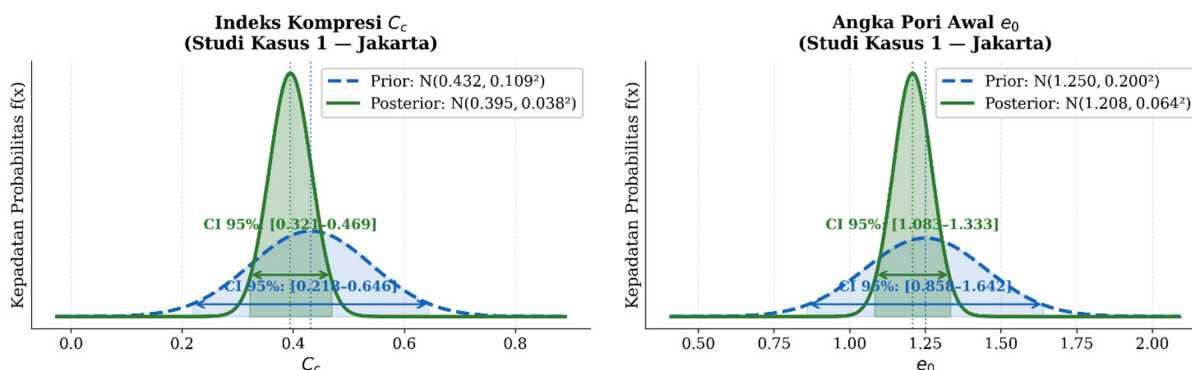
1. Distribusi prior  $p(\theta)$ : distribusi probabilitas yang mencerminkan pengetahuan tentang parameter  $\theta$  sebelum ada data pengujian langsung. Dalam konteks ini, prior diturunkan dari korelasi empiris antara LL dan parameter konsolidasi — informasi yang selalu tersedia karena pengujian Atterberg mudah dan murah.
2. Fungsi likelihood  $L(\theta | \text{data})$ : mengukur seberapa konsisten data pengujian oedometer dengan nilai parameter  $\theta$  yang diasumsikan. Likelihood tinggi ketika data konsisten dengan  $\theta$ , dan rendah ketika tidak.
3. Distribusi posterior  $p(\theta | \text{data})$ : distribusi yang mencerminkan pengetahuan tentang  $\theta$  setelah data tersedia. Teorema Bayes menyatakan:

$$p(\theta | \text{data}) \propto L(\theta | \text{data}) \cdot p(\theta) \quad (4)$$

Artinya: distribusi posterior proporsional terhadap hasil kali prior dan likelihood. Posterior adalah kompromi tertimbang antara pengetahuan awal dan informasi dari data — bobot masing-masing ditentukan oleh presisinya (kebalikan varians).

Sifat konjugat Gaussian menjadi kunci efisiensi kerangka ini: ketika prior dan likelihood keduanya berdistribusi normal, posterior juga normal secara eksak, dan parameternya memiliki formula *closed-form* yang dapat dikerjakan di spreadsheet tanpa simulasi numerik. Formula ini diturunkan pada Subbab 2.5.

Konsekuensi penting dari kerangka ini untuk penggunaan praktis: (1) distribusi posterior selalu lebih sempit dari prior — setiap data baru mengurangi ketidakpastian tanpa terkecuali; dan (2) semakin akurat pengujian ( $\sigma$  kecil) dan semakin banyak sampel ( $n$  besar), semakin dominan data terhadap prior. Gambar 1 mengilustrasikan pergeseran distribusi dari prior ke posterior untuk parameter  $C_c$  dan  $e_0$ .



Gambar 1. Pergeseran distribusi prior (garis putus-putus, biru) ke posterior (garis penuh, hijau) untuk  $C_c$  dan  $e_0$ , Studi Kasus 1 — Jakarta, setelah empat sampel oedometer. Penyempitan kurva mencerminkan pengurangan ketidakpastian. Arsiran: interval kredibel 95%.

### 2.3. Pembentukan Prior dari Korelasi Empiris

Dengan kerangka Bayesian yang telah dipahami, langkah pertama adalah membangun distribusi prior untuk  $C_c$  dan  $e_0$  dari informasi yang tersedia sebelum pengujian oedometer. Sumber informasi ini adalah data Atterberg lapangan dan korelasi empiris yang menghubungkannya dengan parameter konsolidasi.

Batas cair dimodelkan sebagai variabel acak berdistribusi normal untuk merepresentasikan variabilitas spasial lapisan tanah:

$$LL \sim \mathcal{N}(\mu_{LL}, \sigma_{LL}^2) \quad (5)$$

dimana  $\mu_{LL}$  adalah rata-rata dan  $\sigma_{LL}^2$  adalah varians dari seluruh data Atterberg yang tersedia.

#### 2.3.1. Prior untuk $C_c$

Korelasi Skempton (1944) untuk lempung anorganik:

$$C_c = 0,009 (LL - 10) \quad (6)$$

Korelasi ini cukup populer di kalangan praktisi termasuk di Indonesia, dikarenakan dapat mudah dihitung dari data batas Atterberg. Karena  $LL$  adalah variabel acak,  $C_c$  hasil korelasi juga menjadi variabel acak. Mean dan varians prior  $C_c$  diperoleh dari propagasi FOSM pada hubungan linear Persamaan (5):

$$\mu_{C_c} = 0,009 (\mu_{LL} - 10) \quad (7)$$

$$\sigma_{C_c}^2 = (0,009)^2 \sigma_{LL}^2 + \sigma_{\varepsilon, C_c}^2 \quad (8)$$

Varians total  $\sigma_{C_c}^2$  terdiri dari dua komponen: (1) varians dari variabilitas  $LL$ ,  $(0,009)^2 \sigma_{LL}^2$ , yang dapat dikurangi dengan menambah jumlah sampel Atterberg; dan (2) model error korelasi Skempton,  $\sigma_{\varepsilon, C_c}^2$ , yang bersifat tetap, hanya dapat dikurangi dengan pengujian oedometer. Nilai  $\sigma_{\varepsilon, C_c} \approx 0,06-0,10$  adalah estimasi wajar untuk lempung anorganik.

#### 2.3.2. Prior untuk $e_0$

Untuk tanah jenuh ( $S_r = 1$ ):

$$e_0 = w_n \cdot G_s \quad (S_r = 1) \quad (9)$$

Varians total  $e_0$  menggabungkan variabilitas spasial dan model error estimasi:

$$\sigma_{e_0, total}^2 = \sigma_{e_0, spasial}^2 + \sigma_{\varepsilon, e_0}^2 \quad (10)$$

#### 2.3.3. Kovarians $C_c - e_0$

$C_c$  dan  $e_0$  tidak independen: keduanya dipengaruhi mineralogi dan sejarah deposisi yang sama, sehingga cenderung bernilai tinggi atau rendah secara bersamaan. Ketergantungan ini dikuantifikasikan sebagai kovarians:

$$Cov(C_c, e_0) = \rho_{C_c, e_0} \cdot \sigma_{C_c} \cdot \sigma_{e_0} \quad (11)$$

$\rho$  = koefisien korelasi Pearson, bernilai 0,5–0,75 untuk lempung anorganik (Phoon dan Kulhawy, 1999). Kovarians ini berperan penting dalam propagasi FOSM yang dijelaskan berikut.

### 2.4. Propagasi Ketidakpastian: Metode FOSM

Pada *framework* Bayesian (Subbab 2.2), ketidakpastian parameter diwakilkan sebagai distribusi. Namun yang dibutuhkan dalam desain adalah ketidakpastian *settlement*  $S_c$  — bukan ketidakpastian  $C_c$  atau  $e_0$  secara terpisah. Metode FOSM menjembatani keduanya, yaitu mempropagasikan distribusi parameter *input* melalui persamaan Terzaghi untuk menghasilkan distribusi *output*  $S_c$ . Metode ini digunakan dua kali: untuk

membangun prior  $S_c$  (dari prior  $C_c$  dan  $e_0$ ), dan kembali setelah pembaruan Bayesian untuk membangun posterior  $S_c$  (dari posterior  $C_c$  dan  $e_0$ ).

Ada tiga metode propagasi ketidakpastian yang umum:

1. Simulasi Monte Carlo: membangkitkan ribuan pasang nilai ( $C_c$ ,  $e_0$ ) secara acak, menghitung  $S_c$  untuk setiap pasang, lalu membangun distribusi empiris. Akurat untuk nonlinearitas apapun, tetapi memerlukan  $N \geq 10.000$  kalkulasi dan perangkat lunak khusus.
2. Point Estimate Method (PEM): mengevaluasi fungsi pada titik-titik tertentu di sekitar nilai rata-rata, lalu menggabungkan hasilnya secara tertimbang. Lebih sederhana dari Monte Carlo, tetapi jumlah evaluasi tumbuh secara eksponensial dengan jumlah variabel.
3. First-Order Second-Moment (FOSM): mengaproksimasi fungsi nonlinear dengan garis singgung (ekspansi Taylor orde pertama) di sekitar nilai rata-rata. Hanya memerlukan turunan parsial pertama — tidak ada simulasi, dapat dikerjakan di spreadsheet. Validitas FOSM bergantung pada tingkat nonlinearitas fungsi dan besarnya COV parameter masukan ( $C_c$  dan  $e_0$ ).

FOSM dipilih dalam makalah ini karena: (1) kemudahan implementasi di spreadsheet; (2) transparansi (setiap sumber ketidakpastian tercermin eksplisit dalam formula); dan (3) validitas yang memadai untuk lempung tipikal ( $e_0 \in [0,8; 2,0]$ ) dan COV parameter masukan  $\leq 20\%$ , di mana aproksimasi linearisasi menghasilkan  $\sigma_{S_c}$  yang menyimpang  $\leq 5\%$  dari Monte Carlo. Untuk COV  $C_c \geq 20\%$  atau gambut ( $e_0 \geq 3$ ), Monte Carlo direkomendasikan sebagai verifikasi.

Persamaan Terzaghi dapat ditulis sebagai fungsi dua variabel acak, dengan  $\sigma^* = \log_{10}(\sigma'_{vf}/\sigma'_{v0})$  deterministik:

$$S_c = \frac{C_c \cdot H}{1 + e_0} \cdot \sigma^* \quad (12)$$

Ekspansi Taylor orde pertama menghasilkan mean dan varians  $S_c$ :

$$\mu_{S_c} \approx \frac{\mu_{C_c} \cdot H}{1 + \mu_{e_0}} \cdot \Delta\sigma^* \cdot 1000 \quad [mm] \quad (13)$$

$$Var(S_c) \approx \left(\frac{\partial g}{\partial C_c}\right)^2 \sigma_{C_c}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial e_0}\right)^2 \sigma_{e_0}^2 + 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial C_c} \cdot \frac{\partial g}{\partial e_0} \cdot Cov(C_c, e_0) \quad (14)$$

Turunan parsialnya:

$$\frac{\partial g}{\partial C_c} = \frac{H \cdot \sigma^*}{1 + e_0} \quad (15a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial e_0} = -\frac{C_c \cdot H \cdot \sigma^*}{(1 + e_0)^2} \quad (15b)$$

Karena  $\partial g/\partial e_0$  bernilai negatif, suku kovarians dalam Persamaan (13) bernilai negatif untuk  $\rho \geq 0$ . Ini berarti mengabaikan kovarians ( $\rho = 0$ ) akan melebih-estimasi  $\sigma_{S_c}$  (terlalu konservatif). Pada Studi Kasus 1, perbedaannya 17% (Subbab 3.4.3).

## 2.5. Pembaruan Bayesian: Formula dan Implementasi

Setelah prior  $S_c$  dihitung melalui FOSM, langkah selanjutnya adalah mengintegrasikan data oedometer menggunakan teorema Bayes (Subbab 2.2). Pembaruan dilakukan pada level parameter ( $C_c$  dan  $e_0$ ), bukan langsung pada  $S_c$ , karena data oedometer mengukur  $C_c$  dan  $e_0$  secara langsung. Setelah parameter diperbarui, FOSM kembali digunakan untuk memperoleh posterior  $S_c$ . Hubungan ini dapat digambarkan sebagai:

**Prior  $C_c$  dan  $e_0 \rightarrow$  FOSM  $\rightarrow$  Prior  $S_c$  | Data oedometer  $\rightarrow$  Bayes update  $\rightarrow$  Posterior  $C_c$  dan  $e_0 \rightarrow$  FOSM  $\rightarrow$  Posterior  $S_c$**

### 2.5.1. Model pengukuran

Setiap pengukuran  $C_c$  dari sampel oedometer ke- $i$  dimodelkan sebagai nilai sebenarnya ditambah error acak:

$$C_{c,i}^{obs} = C_c^{true} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathbb{N}(0, \sigma_{\varepsilon, meas}^2) \quad (16)$$

dimana  $\sigma_{e,meas}$  adalah standar deviasi error pengukuran yang mencakup variabilitas pengujian, gangguan sampel, dan ketidakhomogenan lokal. Nilai tipikal:  $\sigma_{e,meas} \approx 0,03-0,08$  untuk  $C_c$ .

### 2.5.2. Formula posterior closed-form

Fungsi likelihood untuk  $n$  sampel oedometer:

$$L(\theta | x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{e,meas}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma_{e,meas}^2}\right) \quad (17)$$

Sifat konjugat Gaussian menghasilkan posterior yang juga berdistribusi normal, dengan parameter:

$$\mu_n = \frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma_{e,meas}^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma_{e,meas}^2}} \quad (18)$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma_{e,meas}^2}} \quad (19)$$

dengan  $\bar{x}$  adalah rata-rata dari  $n$  pengukuran oedometer. Formula ini berlaku identik untuk  $e_0$ .

Formula (17) dapat dibaca sebagai rata-rata tertimbang presisi antara prior ( $\mu_0/\sigma_0^2$ ) dan data ( $n \cdot \bar{x}/\sigma_{e,meas}^2$ ). Dua implikasi praktis penting: pertama, semakin banyak sampel ( $n$  besar) atau semakin akurat pengujian ( $\sigma_{e,meas}$  kecil), semakin besar dominasi data terhadap prior; kedua, dari Persamaan (18), varians posterior selalu lebih kecil dari varians prior. Artinya, setiap data oedometer tambahan selalu mengurangi ketidakpastian, tanpa terkecuali.

Setelah  $\mu_n$  dan  $\sigma_n$  untuk  $C_c$  dan  $e_0$  diperoleh, keduanya disubstitusikan ke FOSM (Pers. 13–15b) untuk mendapatkan:  $\mu_{Sc,post}$ ,  $\sigma_{Sc,post}$ , dan CI 95% =  $[\mu_{Sc,post} - 1,96\sigma_{Sc,post}; \mu_{Sc,post} + 1,96\sigma_{Sc,post}]$ .

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1. Parameter Input dan Ringkasan Hasil

Dua studi kasus dipilih untuk mewakili kondisi lempung lunak yang umum di Indonesia: (1) lempung marine *normally consolidated* (NC) di kawasan reklamasi Jakarta Utara, dan (2) lempung plastisitas sedang untuk fondasi gedung komersial di Surabaya. Tabel 2 merangkum parameter input dan seluruh hasil pembaruan Bayesian.

Tabel 2. Parameter input dan hasil pembaruan Bayesian-FOSM untuk kedua studi kasus

Parameter	Studi Kasus 1 (Jakarta)	Studi Kasus 2 (Surabaya)
$\mu_{LL}$ (%)	58	44
$\sigma_{LL}$ (%)	9	6
$\mu_{e0}$	1,25	0,95
$\sigma_{e0}$	0,20	0,14
H (m)	7	5
$\sigma'_{v0}$ (kPa)	75	90
$\sigma'_{vf}$ (kPa)	150	170
$\rho$ ( $C_c, e_0$ )	0,65	0,60
n sampel oedometer	4	3
$\mu_{Sc,Prior}$ (mm)	231	105
$\sigma_{Sc,Prior}$ (mm)	78	33
CI 95% Prior (mm)	[78; 384]	[41; 169]
$\mu_{Sc,Posterior}$ (mm)	210	108

$\sigma_{Sc,Posterior}$ (mm)	34	16
CI 95% Posterior (mm)	[143; 277]	[77; 139]
<b>Reduksi <math>\sigma_{Sc}</math></b>	<b>56%</b>	<b>52%</b>

### 3.2. Studi Kasus 1 — Lempung Marine, Jakarta Utara

#### 3.2.1. Pembentukan prior

Pengujian Atterberg pada 12 sampel:  $\mu_{LL} = 58\%$  dan  $\sigma_{LL} = 9\%$ . Penerapan Persamaan (6) dan (7):

$$\mu_{Cc} = 0,009 \times (58 - 10) = 0,432$$

$$\sigma_{Cc} = \sqrt{[(0,009^2)(9^2) + (0,07^2)]} = 0,109 \quad (\text{COV} = 25,3\%)$$

Dengan  $\mu_{e0} = 1,25$ ,  $\sigma_{e0} = 0,20$ ,  $\rho = 0,65$ ,  $H = 7$  m,  $\sigma'_{v0} = 75$  kPa,  $\sigma'_{vf} = 150$  kPa, FOSM menghasilkan prior settlement:  $\mu_{Sc} = 231$  mm,  $\sigma_{Sc} = 78$  mm, CI 95% = [78; 384] mm. Rentang 306 mm ini terlalu lebar untuk keperluan desain pondasi.

#### 3.2.2. Pembaruan posterior

Empat sampel oedometer:  $C_{c,obs} = \{0,41; 0,38; 0,43; 0,36\}$ ,  $e_{0,obs} = \{1,18; 1,22; 1,15; 1,28\}$ . Rata-rata:  $\bar{x}_{Cc} = 0,395$  dan  $\bar{x}_{e0} = 1,208$ . Dengan  $\sigma_{e,meas,Cc} = 0,05$  dan  $\sigma_{e,meas,e0} = 0,08$ , Persamaan (17)–(18) menghasilkan:  $\mu_{Cc,post} = 0,395$ ;  $\sigma_{Cc,post} = 0,038$  (COV turun dari 25,3%  $\rightarrow$  9,6%);  $\mu_{e0,post} = 1,208$ ;  $\sigma_{e0,post} = 0,064$ . Posterior settlement:  $\mu_{Sc,post} = 210$  mm,  $\sigma_{Sc,post} = 34$  mm, CI 95% = [143; 277] mm. Reduksi  $\sigma_{Sc}$  sebesar **56%** dari 78 mm menjadi 34 mm. Pergeseran nilai tengah dari 231 ke 210 mm (–21 mm) menunjukkan korelasi Skempton sedikit melebihi-estimasi  $C_c$  untuk lempung marine Jakarta, konsisten dengan temuan Hardiyatmo (2002) tentang perbedaan mineralogi lempung tropis terhadap dataset asli Skempton.

### 3.3. Studi Kasus 2 — Lempung Plastisitas Sedang, Surabaya

#### 3.3.1. Pembentukan prior

Data Atterberg dari 8 sampel:  $\mu_{LL} = 44\%$ ,  $\sigma_{LL} = 6\%$ . Penerapan Persamaan (6) dan (7):

$$\mu_{Cc} = 0,009 \times (44 - 10) = 0,306$$

$$\sigma_{Cc} = \sqrt{[(0,009^2)(6^2) + (0,06^2)]} = 0,073 \quad (\text{COV} = 23,9\%)$$

Dengan  $\mu_{e0} = 0,95$ ,  $\sigma_{e0} = 0,14$ ,  $\rho = 0,60$ ,  $H = 5$  m,  $\sigma'_{v0} = 90$  kPa,  $\sigma'_{vf} = 170$  kPa, prior settlement:  $\mu_{Sc} = 105$  mm,  $\sigma_{Sc} = 33$  mm, CI 95% = [41; 169] mm.

#### 3.3.2. Pembaruan posterior

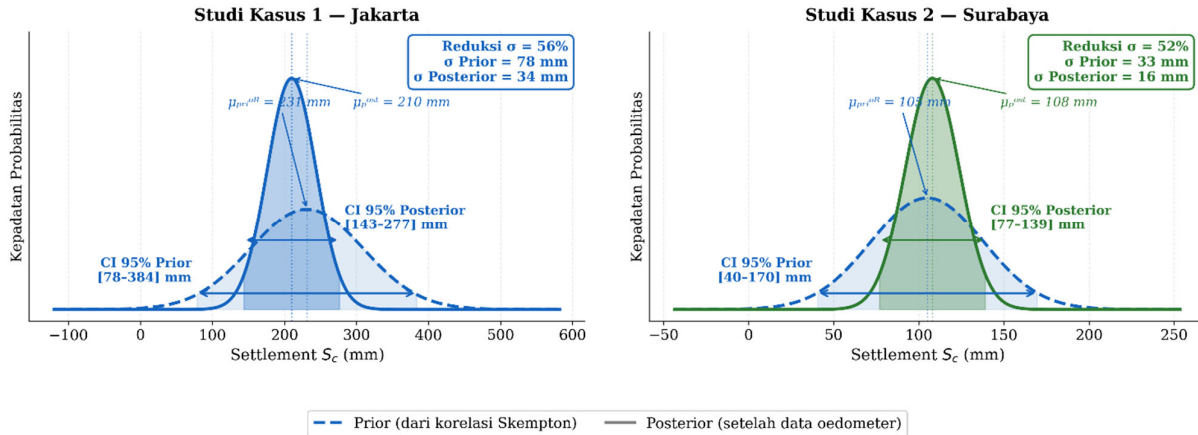
Tiga sampel oedometer:  $C_{c,obs} = \{0,31; 0,29; 0,33\}$ ,  $e_{0,obs} = \{0,91; 0,96; 0,93\}$ . Posterior:  $\mu_{Cc,post} = 0,308$ ;  $\sigma_{Cc,post} = 0,040$ ;  $\mu_{e0,post} = 0,933$ ;  $\sigma_{e0,post} = 0,075$ . Posterior settlement:  $\mu_{Sc,post} = 108$  mm,  $\sigma_{Sc,post} = 16$  mm, CI 95% = [77; 139] mm. Reduksi  $\sigma_{Sc}$  sebesar **52%**. Pergeseran nilai tengah yang kecil (+3 mm) mengindikasikan korelasi Skempton cocok untuk lempung Surabaya; pembaruan Bayesian di sini berfungsi terutama untuk mempersempit ketidakpastian, bukan mengoreksi bias.

### 3.4. Analisis dan Pembahasan

#### 3.4.1. Distribusi prior vs posterior settlement

Gambar 2 menampilkan distribusi prior dan posterior  $S_c$  untuk kedua studi kasus secara berdampingan. Tiga aspek penting dapat dibaca langsung dari gambar ini:

Pertama, penyempitan kurva yang signifikan: rentang CI 95% menyempit dari 306 mm menjadi 134 mm (SK-1) dan dari 128 mm menjadi 62 mm (SK-2). Secara praktis, ini berarti insinyur memiliki dasar kuantitatif yang jauh lebih kuat untuk memutuskan kedalaman fondasi, tebal timbunan pralading, atau kebutuhan perkuatan tanah. Kedua, pergeseran nilai tengah yang berbeda. Pergeseran –21 mm pada SK-1 menunjukkan bias sistematis korelasi Skempton untuk lempung marine Jakarta — sinyal bahwa penggunaan korelasi tanpa verifikasi oedometer dapat menghasilkan desain yang berlebihan. Pergeseran +3 mm pada SK-2 mengkonfirmasi korelasi bekerja baik untuk jenis tanah ini. Ketiga, posisi CI posterior terhadap nilai izin. Pada SK-1, CI posterior [143; 277] mm berada di bawah batas izin tipikal untuk bangunan bertingkat rendah di Jakarta ( $\approx 350$  mm), memberikan keyakinan 95% bahwa settlement aktual tidak akan melampaui batas tersebut.

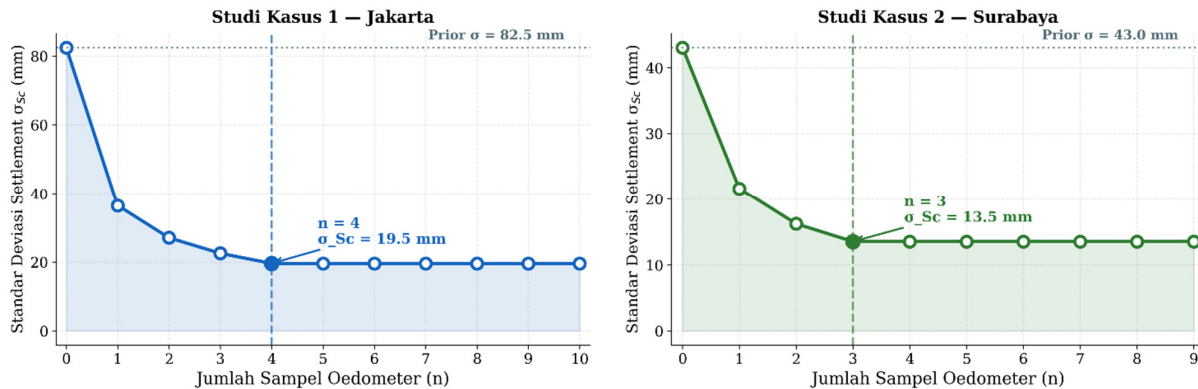


Gambar 2. Distribusi prior (garis putus-putus, biru) dan posterior (garis penuh, hijau) settlement  $S_c$  untuk kedua studi kasus. Arsiran: interval kredibel 95%. (a) SK-1 Jakarta:  $\sigma$  turun 56%, mean bergeser  $-21$  mm. (b) SK-2 Surabaya:  $\sigma$  turun 52%, mean bergeser  $+3$  mm.

### 3.4.2. Konvergensi ketidakpastian terhadap jumlah sampel

Gambar 3 menjawab pertanyaan praktis yang sering dihadapi insinyur geoteknik: “Berapa sampel oedometer yang cukup?”. Pada SK-1, sampel pertama saja sudah mengurangi  $\sigma_{Sc}$  dari 78 mm menjadi  $\approx 51$  mm (pengurangan 35%). Empat sampel mencapai 34 mm. Sampel ke-5 hingga seterusnya memberikan pengurangan yang semakin kecil. Fenomena *diminishing returns* ini adalah konsekuensi langsung dari Persamaan (18): setiap sampel baru mengurangi varians posterior dengan laju yang semakin lambat.

Implikasi praktis: grafik ini dapat digunakan untuk menetapkan jumlah sampel optimal berdasarkan keseimbangan antara biaya investigasi dan pengurangan ketidakpastian yang dicapai. Misalnya, jika  $\sigma_{Sc} = 40$  mm sudah dianggap cukup untuk desain, pada SK-1 ini tercapai dengan tiga sampel oedometer, sehingga sampel keempat tidak lagi diperlukan.

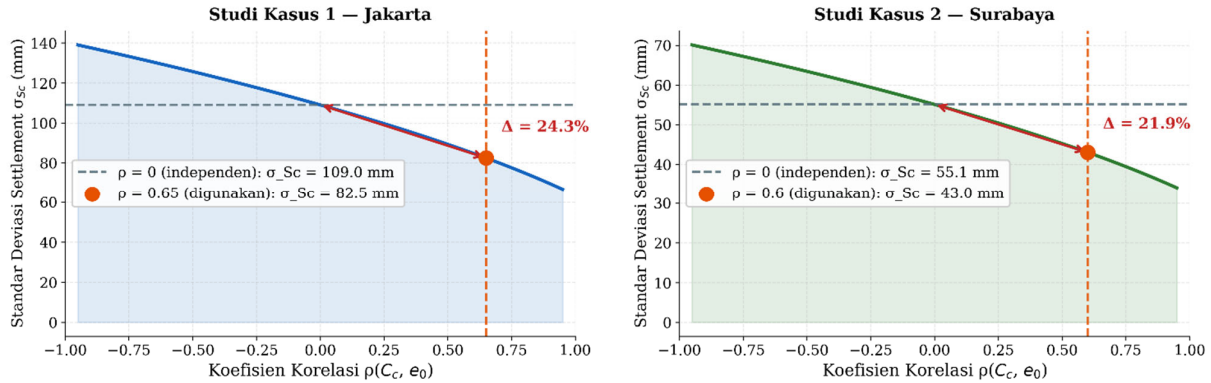


Gambar 3. Konvergensi  $\sigma_{Sc}$  terhadap jumlah sampel oedometer  $n$ . Titik bersisir: jumlah sampel aktual yang digunakan. Garis putus-putus horizontal: nilai prior  $\sigma_{Sc}$ . Efek diminishing returns terlihat jelas pada kedua studi kasus.

### 3.4.3. Pengaruh kovarians $C_c-e_0$

Gambar 4 memperlihatkan sensitivitas  $\sigma_{Sc}$  terhadap pilihan nilai  $\rho$ . Hasil ini penting sebagai justifikasi mengapa kovarians tidak dapat diabaikan. Pada SK-1 dengan  $\rho = 0$  (asumsi independen),  $\sigma_{Sc,prior} = 91$  mm. Dengan  $\rho = 0,65$ ,  $\sigma_{Sc,prior} = 78$  mm — selisih 13 mm atau 17%. Dari perspektif insinyur, overestimasi  $\sigma_{Sc}$  sebesar 17% berarti rentang perencanaan yang terlalu lebar, yang dapat mengakibatkan keputusan konservatif berlebihan seperti kedalaman fondasi atau tebal preloading yang tidak perlu besar.

Hubungan negatif antara  $\rho$  dan  $\sigma_{Sc}$  pada Gambar 4 ( $\sigma_{Sc}$  turun saat  $\rho$  naik) mencerminkan mekanisme kompensasi yang telah dijelaskan pada Subbab 2.3: jika  $C_c$  diestimasi tinggi (menghasilkan  $S_c$  besar),  $e_0$  yang berkorelasi positif juga cenderung tinggi (sehingga penyebut besar dan  $S_c$  mengecil), sehingga dua efek tersebut sebagian saling meniadakan.

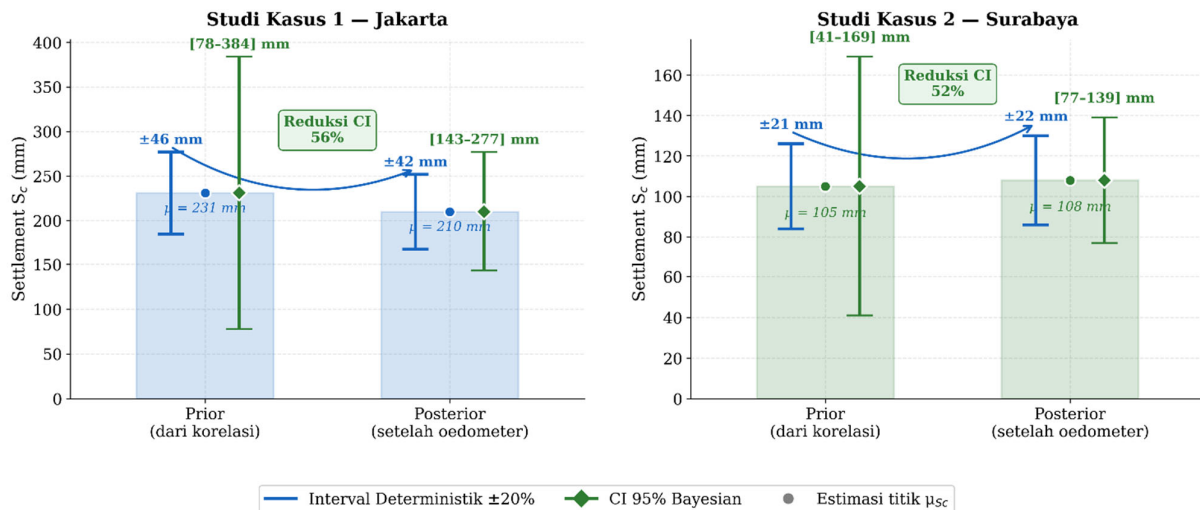


Gambar 4. Sensitivitas  $\sigma_{sc}$  terhadap  $\rho(C_c, e_0)$  untuk kedua studi kasus. Titik oranye: nilai  $\rho$  yang digunakan. Garis putus-putus abu-abu:  $\sigma_{sc}$  jika kovarians diabaikan ( $\rho=0$ ). Selisih mencapai 17% (SK-1) dan 12% (SK-2).

### 3.4.4. Perbandingan dengan metode deterministik

Gambar 5 membandingkan tiga representasi ketidakpastian untuk empat kondisi analisis (prior dan posterior kedua studi kasus): (1) estimasi titik  $\mu_{sc}$ ; (2) interval deterministik  $\pm 20\%$  sebagai aturan praktis yang umum digunakan; dan (3) interval kredibel 95% Bayesian.

Dua temuan penting: pertama, interval deterministik  $\pm 20\%$  secara sistematis lebih sempit dari interval prior Bayesian pada kedua studi kasus, artinya aturan  $\pm 20\%$  terlalu optimistis dalam menggambarkan ketidakpastian yang sesungguhnya ketika parameter hanya diketahui dari korelasi. Kedua, setelah pembaruan Bayesian, interval posterior jauh lebih sempit dari keduanya, berbasis data tanah aktual di lokasi, bukan asumsi umum. Ini adalah keunggulan utama pendekatan probabilistik berbasis data.



Gambar 5. Perbandingan interval prediksi settlement: deterministik  $\pm 20\%$  (bar biru) vs interval kredibel 95% Bayesian prior dan posterior (bar hijau). Simbol: estimasi titik  $\mu_{sc}$ . Prior Bayesian lebih lebar dari  $\pm 20\%$ ; posterior lebih sempit.

## 4. KESIMPULAN

Berdasarkan pengembangan kerangka teoritis dan validasi pada dua studi kasus lempung lunak *normally consolidated* (NC) di Indonesia, diperoleh kesimpulan:

1. Distribusi prior untuk  $C_c$  dan  $e_0$  dapat diturunkan secara sistematis dari korelasi empiris Skempton (1944) dengan mengkuantifikasikan dua sumber ketidakpastian yang berbeda: variabilitas spasial batas cair tanah dan model error korelasi. Kovarians antara kedua parameter yang sering diabaikan dalam analisis probabilistik geoteknik terbukti memberikan pengaruh hingga 17% terhadap estimasi  $\sigma_{sc}$  dan tidak dapat dikesampingkan.

2. Sifat konjugat Gaussian memungkinkan pembaruan posterior secara analitis dalam bentuk closed-form tanpa memerlukan komputasi numerik intensif seperti MCMC. Formula (17)–(18) dapat diimplementasikan langsung pada spreadsheet standar, menjadikan kerangka ini praktis untuk penggunaan teknik sehari-hari.
3. Dua studi kasus menunjukkan reduksi  $\sigma_{sc}$  sebesar 52–56% hanya dengan 3–4 sampel oedometer. Kurva konvergensi  $\sigma_{sc}$  terhadap  $n$  (Gambar 3) dapat langsung digunakan untuk merencanakan program investigasi yang optimal berdasarkan keseimbangan antara biaya pengujian dan pengurangan ketidakpastian desain.
4. Perbandingan distribusi prior dan posterior memungkinkan evaluasi kesesuaian korelasi empiris yang digunakan: pergeseran nilai tengah yang besar (seperti  $-21$  mm pada SK-1) mengindikasikan perlunya koreksi atau pemilihan korelasi regional yang lebih sesuai untuk jenis tanah setempat.
5. Untuk tanah dengan variabilitas tinggi (gambut, lempung organik,  $COV > 20\%$ ), simulasi Monte Carlo dengan  $N \geq 10.000$  direkomendasikan sebagai pelengkap FOSM untuk memverifikasi validitas aproksimasi linearisasi.

### UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini dapat terlaksana berkat dukungan pendanaan dari Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LPPM) Universitas Muhammadiyah Kalimantan Timur. Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya atas kepercayaan dan dukungan yang diberikan.

### DAFTAR PUSTAKA

- Ang, A. H-S. dan Tang, W. H., 1975, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. I*, John Wiley & Sons, New York.
- Cao, Z., Wang, Y. dan Li, D., 2016, Quantification of prior knowledge in geotechnical site characterization, *Engineering Geology*, Vol. 203, hlm. 107–116.
- Christian, J. T., Ladd, C. C. dan Baecher, G. B., 1994, Reliability applied to slope stability analysis, *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 120, No. 12, hlm. 2180–2207.
- Hardiyatmo, H. C., 2002, *Mekanika Tanah I*, edisi ke-3, Gadjah Mada University Press, Yogyakarta.
- Phoon, K.-K. dan Kulhawy, F. H., 1999, Characterization of geotechnical variability, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 36, No. 4, hlm. 612–624.
- Skempton, A. W., 1944, Notes on the compressibility of clays, *Quarterly Journal of the Geological Society of London*, Vol. 100, hlm. 119–135.
- Terzaghi, K. dan Peck, R. B., 1967, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, edisi ke-2, John Wiley & Sons, New York.