ISSN: 2527-533X

Solusi Persamaan Schrodinger 1-dimensi untuk Potensial Deng Fan MenggunakanKonstruksi Supersimetri

[1,]Wahyulianti, A. Suparmi, C. Cari
[1,]Program Studi Ilmu Fisika Pascasarjana Universitas Sebelas Maret,
Jl. Ir. Sutami 36A KentinganJebres, Surakarta
Email: wahyuliantiyuli@yahoo.com

Abstrak: Pasangan potensial V_2dari potensial Deng Fan dikonstruksi dengan menggunakan metode Supersimetri Mekanika Kuantum. Persamaan energi keadaan dasar dan fungsi gelombang keadaan dasar ditentukan dari solusi persamaan Schrodinger 1-dimensi untuk potensialDeng Fan dengan menggunakan metode Nikiforov-Uvarov. Pasangan potensial V_2 ditentukan dari potensial efektif, energi keadaan dasar, dan superpotensial dari potensial Deng Fan.Superpotensial sistem ditentukan dari fungsi gelombang keadaan dasar dengan menerapkan sifat operator Supersymmetry. Persamaan energi dan fungsi gelombang keadaan dasar dari pasangan potensial V_2 hasil konstruksi ditentukan dengan metode Supersimetri Mekanika Kuantum. Persamaan energi dan fungsi gelombang keadaan dasar dari potensial hasil konstruksi berbeda dengan persamaan energi dan fungsi gelombang keadaan dasar dari potensial asli.

Kata Kunci: pasangan potensial, metode supersimetri, energi, fungsi gelombang.

1. PENDAHULUAN

Supersimetri Mekanika Kuantummerupakan model teori medan SUSY yang paling sederhana yang dikembangkan berdasarkan usulan Witten (Suparmi. 2017).Supersimetri Mekanika Kuantum telah berkembang sebagai salah satu metode yang digunakan untuk memecahkan persamaan Schrodinger satu dimensi tanpa menyelesaikan persamaan diferensial orde kedua secara langsung (Suparmi. 2012). Konstruksi pasangan potensial dilakukan dengan menerapkan sifat-sifat Supersimetri Mekanika Kuantum, operator Supersimetri Mekanika Kuantum, dan persamaan fungsi gelombang keadaan dasar dari potensi asli (Suparmi. 2017

Penyelesaian persamaan Schrodinger untuksatu dimensi dapat dilakukan denganmenggunakan persamaan diferensial orde dua fungsi hipergeometri dan hipergeometri confluent (Suparmi, 2012). Metodepenyelesaian persamaan Schrodinger yang umum digunakan adalah metodeNikiforov-Uvarov (NU) dan Supersimetri Mekanika Kuantum. Metode NU adalah salah satu cara untuk menyelesaikanpersamaan Schrodinger dengan potensial tertentumelalui substitusi variabel danparameter sehinggapersamaan Schrodinger tereduksi menjadi persamaandiferensial orde dua fungsi hipergeometri (persamaantipe hipergeometri) (Suparmi, 2012; D. Agboola. 2009: Benedic. 2013).

Pada makalah ini disajikan penyelesaianpersamaan Schrodinger 1-dimensi untuk sistem yangdipengaruhi oleh potensial Deng Fan. Persamaan energi dan fungsi gelombang daripotensial Deng Fanditentukandengan menggunakan persamaandiferensial fungsi hipergeometri. Persamaan dari potensial Deng Fan yang digunakan adalah

$$V(x)=\frac{-2bD_e e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha x}}+\frac{b^2 D_e e^{-2\alpha x}}{\left(1-e^{-\alpha x}\right)^2} \quad (1)$$

di mana $= -2bD_e$ dan $\beta = b^2 D_e$.

Persamaan Schrödinger 1-dimensi untuk potensial Deng Fandinyatakan sebagai

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+\left(\frac{e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha x}}+\frac{\beta e^{-2\alpha x}}{\left(1-e^{-\alpha x}\right)^2}\right)\psi(x)=E\psi(x) \quad (2)$$

1.1 Metode Nikiforov-Uvarov

Persamaan diferensial tipe hipergeometri, yang diselesaikan dengan menggunakan metode Nikiforov-Uvarov (Suparmi, 2017) adalah

$$\frac{\partial^2\psi(s)}{\partial s^2}+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\frac{\partial\psi(s)}{\partial s}+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s)=0 \quad (3)$$

di mana $\sigma(s)$ dan $\tilde{\sigma}(s)$ adalah polinomial orde dua, and $\tilde{\tau}(s)$ adalah polinomial orde satu.

Persamaan (3) diselesaikan denganmenggunakan metode pemisahan variabel

$$\psi(s)=\phi(s)\,y(s) \quad (4)$$

Maka persamaan (3) menjadi persamaan tipe hipergeometri

$$\sigma\frac{\partial^2 y(s)}{\partial s^2}+\tau(s)\frac{\partial y(s)}{\partial s}+\lambda y(s)=0 \quad (5)$$

dan $\phi(s)$ adalah turunan logaritma yang memenuhi syarat bahwa $\frac{\phi'}{\phi}=\frac{\pi}{\sigma}$ dengan $\pi(s)$, λ, dan τ adalah

$$\pi=\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}+k\sigma} \quad (6)$$

di mana

$$\tau=\tilde{\tau}+2\pi,\ \lambda=k+\pi',\ \text{dan}$$
$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'-\frac{n(n-1)}{2}\sigma'',\quad n=0,1,2,... \quad (7)$$

Solusi dari bagian kedua dari fungsi gelombang y_n (s)dengan menggunakan hubungan Rodrigues adalah

$$y_n(s)=\frac{C_n}{w(s)}\frac{d^n}{ds^n}\left(\sigma^n(s)w(s)\right) \quad (8)$$

di mana C_n adalah konstanta normalisasi, dan fungsi bobot *w(s)* memenuhi kondisi

$$\frac{\partial(\sigma w)}{\partial s}=\tau(s)w(s) \quad (9)$$

Jika dalam parametrik umum, persamaan tipe hipergeometrik dalam persamaan (3) ditulis sebagai (suparmi, 2017)

$$\frac{\partial^2 \cdot (s)}{\partial s^2}+\frac{(c_1-c_2 s)}{s(1-c_3 s)}\frac{\partial \cdot (s)}{\partial s}+\frac{(-£_1 s^2+£_2 s-£_3)}{s^2(1-c_3 s)^2}\cdot (s)=0 \quad (10)$$

Dengan membandingkan persamaan (3) dan persamaan (10) maka diperoleh persamaan energi dan fungsi gelombang, yaitu

$$\begin{aligned} & c_2 n-(2n+1)c_5+(2n+1)\left(\sqrt{c_9}+c_3\sqrt{c_8}\right) \\ & +n(n-1)c_3+c_7+2c_3c_8+2\sqrt{c_8c_9}=0 \end{aligned} \quad (11)$$

dan

$$\begin{aligned} \cdot\ (s) &= N_{n1} s^{c_{12}}\left(1-c_3 s\right)^{-c_{12}-(c_{13}/c_3)} \\ & P_n^{(c_{10}-1,\ (c_{11}/c_3)-c_{10}-1)}\left(1-2c_3 s\right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & c_4=\frac{1}{2}(1-c_1),\ c_5=\frac{1}{2}(c_2-2c_3), \\ & c_6=c_5^2+£_1,\ c_7=2c_4c_5-£_2,\ c_8=c_4^2+£_3, \\ & c_9=c_3c_7+c_3^2c_8+c_6,\ c_{10}=c_1+2c_4+2\sqrt{c_8}, \\ & c_{11}=c_2-2c_5+2\left(\sqrt{c_9}+c_3\sqrt{c_8}\right), \\ & c_{12}=c_4+\sqrt{c_8},\ c_{13}=c_5-\left(\sqrt{c_9}+c_3\sqrt{c_8}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

1.2 Metode Supersimetri Kuatum Mekanika Kuantum

Pasangan Supersimetri Hamiltonian (Hss) untuk dua operator muatan diberikan oleh

$$H_{ss}=\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d\ddot{}(x)}{dx}+\ddot{}^2(x) & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d\ddot{}(x)}{dx}+\ddot{}^2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \quad (14)$$

dengan pasangan Hamiltonian $H_-=H_1$ dan $H_+=H_2$, serta pasangan potential $V_-=V_1$ dan $V_+=V$ adalah

$$V_-(x)=V_1=\ddot{}^2(x)-\ddot{}'(x) \quad (15)$$

dan

$$V_+(x)=V_2=\ddot{}^2(x)+\ddot{}'(x) \quad (16)$$

Hubungan antara potensial efektif dengan V_1 adalah

$$V_{ef}(x)=V_-(x;a_0)+E_0=V_1(x;a_0)+E_0 \quad (17)$$

di mana E_0 adalah energi keadaan dasar. Dengan menggunakan operator supersimetri,

$$A^+=-\frac{d}{dx}+\ddot{}(x) \text{ dan } A=\frac{d}{dx}+\ddot{}(x) \quad (18)$$

Maka Hamiltonian supersimetri menjadi

$$H_-(x)=H_1=A^+A, \text{ dan } H_+(x)=H_2=AA^+$$

dan

$$A\cdot_0^{(-)}=A\cdot_0=0 \quad (19)$$

Pasangan potensial V_2 dari potensial Deng Fan dapat ditentukan dari persamaan (12) dan (17) yang diberikan sebagai (Anil. 2014; U. Laha. 2016):

$$V_2(x)=V_1-2\frac{d^2}{dx^2}\ln\cdot_0 \quad (20)$$

2. METODE PENELITIAN

Penjabaran persamaan fungsi gelombang dan energi untuk potensial Deng Fan menggunakan konstruksisupersimetri dilakukan dengan beberapa langkah.

Langkah pertama yaitu menentukan persamaan Schrodinger untuk potensial Deng Fan yang dinyatakan pada persamaan (2). Selanjutnya mencarisubstitusi variabel dan parameter yang sesuai agar persamaan (2)berubah menjadi persamaan (10). Dengan membandingkan persamaan (3) dan persamaan (10) maka diperoleh persamaan energi dan fungsi gelombang keadaan dasar untuk n=0 dengan menggunakan persamaan (11) sampai (13).

Langkah ke dua dilakukan untuk konstruksi supersimetri dengan menggunakan persamaan (17), (20) serta persamaan energi dan fungsi gelombang keadaan dasar dari hasil langkah pertama. Kemudian akan diperoleh persamaan (20).

Langkah ketiga yaitu menentukan persamaan energi dan fungsi gelombang keadaan dasar menggunakan metode Supersimetri Mekanika Kuantum dengan menggunakan persamaan (20) sebagai potensialnya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Penyelesaian potensial Deng Fan menggunakan metode NU

Persamaan Schrodinger 1-dimensi dengan potensial Deng Fan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \cdot (x)}{\partial x^2}+\left(\frac{e^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}}+\frac{¥ e^{-2\sim x}}{\left(1-e^{-\sim x}\right)^2}\right)\cdot (x)=E\cdot (x)$$

Setting $\hbar=1, 2m=1$, and $\mathrm{e}^{-\sim x}=s$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2\cdot}{\partial s^2}+\frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{\partial\cdot}{\partial s}+\frac{\left(\begin{array}{l}-(\frac{¥-\;\;-\mathrm{E}_0}{\sim^2})s^2+\\ (\frac{-\;\;-2\mathrm{E}_0}{\sim^2})s-\\ \left(\frac{-\mathrm{E}_0}{\sim^2}\right)\end{array}\right)}{s^2(1-s)^2}\cdot(\mathrm{s})=0 \quad (21)$$

dan dengan membandingkan persamaan (10) dan (21) didapatkan

$$c_1=c_2=c_3=1,$$

$$£_1=\frac{¥-\;\;-\mathrm{E}_0}{\sim^2}, £_2=\frac{-\;\;-2\mathrm{E}_0}{\sim^2},\ £_3=\frac{-\mathrm{E}_0}{\sim^2} \quad (22)$$

Substitusi persamaan (22) ke (13), sehingga diperoleh

$$c_4=0, c_5=-\frac{1}{2}, c_6=\frac{1}{4}+\frac{¥-\;\;-\mathrm{E}_0}{\sim^2},$$

$$c_7=\frac{\;\;+2\mathrm{E}_0}{\sim^2},\ c_8=\frac{-\mathrm{E}_0}{\sim^2},$$

$$c_9=\frac{1}{4}+\frac{¥}{\sim^2}, c_{10}=1+\frac{2}{\sim}\sqrt{-\mathrm{E}_0},$$

$$c_{11}=2+2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{¥}{\sim^2}}+\frac{2}{\sim}\sqrt{-\mathrm{E}_0},\ c_{12}=\frac{1}{\sim}\sqrt{-\mathrm{E}_0}, \quad (23)$$

$$c_{13}=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{¥}{\sim^2}}-\frac{1}{\sim}\sqrt{-\mathrm{E}_0},$$

$$c_{14}=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{¥}{\sim^2}}$$

Substitusi persamaan (23) ke persamaan (11) dan (12) sehingga diperoleh persamaan energi dan fungsi gelombang keadaan dasar, yaitu

$$E_0=-\left(\frac{}{\sqrt{4¥+\sim^2}-\sim}-\frac{1}{2}\sim\right)^2 \quad \text{dan} \quad (24)$$

$$\cdot_0(\mathrm{x})=N_0 s^{c_{12}}(1-s)^{-c_{14}}=N_0 e^{-c_{12}\sim x}\left(1-e^{-\sim x}\right)^{-c_{14}}$$

3.2. Konstruksi pasangan potensial menggunakan operator Supersimetri

Substitusi persamaan (17) dan (24) ke persamaan (20), maka didapatkan pasangan potensial V_2, yaitu

$$V_2(x)=\frac{e^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}}+\frac{¥ e^{-2\sim x}}{\left(1-e^{-\sim x}\right)^2}-E_0-2\left(\frac{c_{14}\sim^2 e^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}}+\frac{c_{14}\sim^2 e^{-2\sim x}}{\left(1-e^{-\sim x}\right)^2}\right) \quad (25)$$

3.3. Penyelesaian pasangan potensial V_2 menggunakan metode Supersimetri

Persamaan Schrodinger dengan potensial yang digunakan adalah pasangan potensial V_2. Penyelesaian kasus ini menggunakan metode Supersimetri Mekanika kuantum. Bentuk Persamaan Schrodinger 1-dimensi untuk persamaan (25) adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\cdot(x)}{\partial x^2}+\left(\begin{array}{l}\frac{e^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}}+\frac{¥ e^{-2\sim x}}{\left(1-e^{-\sim x}\right)^2}\\ -E_0-\frac{2c_{14}\sim^2 e^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}}\\ -\frac{2c_{14}\sim^2 e^{-2\sim x}}{\left(1-e^{-\sim x}\right)^2}\end{array}\right)\cdot(x)=E\cdot(x) \quad (26)$$

Berdasarkan persamaan (26) dapat diketahui Potensial efektif :

$$V_{ef}=\frac{e^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}}+\frac{¥ e^{-2\sim x}}{\left(1-e^{-\sim x}\right)^2}-E_0-\frac{2c_{14}\sim^2 e^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}}-\frac{2c_{14}\sim^2 e^{-2\sim x}}{\left(1-e^{-\sim x}\right)^2} \quad (27)$$

Superpotensial :

$$\text{¤} = \frac{Ae^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}} + B$$
$$\text{¤}^2 = \frac{A^2 e^{-2\sim x}}{\left(1-e^{-\sim x}\right)^2} + \frac{2ABe^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}} + B^2 \quad (28)$$
$$\text{¤}' = -\frac{A\sim e^{-\sim x}}{1-e^{-\sim x}} - \frac{A\sim e^{-2\sim x}}{\left(1-e^{-\sim x}\right)^2}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (15), (27), (28) ke persamaan (17), diperoleh

$$A = \sqrt{\text{¥} + \frac{9}{4}\sim^2} - \frac{3}{2}\sim ,$$
$$B = \frac{}{\sqrt{4\text{¥} + 9\sim^2} - 3\sim} - \frac{3}{2}\sim \quad (29)$$
$$E_0^{'} = -\left[\left(\frac{}{\sqrt{4\text{¥} + 9\sim^2} - 3\sim} - \frac{3}{2}\sim\right)^2 + E_0\right]$$

di mana $E_0^{'}$ adalah energi keadaan dasar untuk pasangan potensial V_2. Persamaan fungsi gelombang keadaan dasar untuk pasangan potensial V_2 didapatkan dari substitusi persamaan (18) dan (28) ke persamaan (19), yaitu

$$\cdot_0^{'}(\mathrm{x}) = N_0 e^{-Bx}\left(1-e^{-\sim x}\right)^{-\frac{A}{\sim}} \quad (30)$$

Persamaan (24), (29), dan (30) menunjukkan bahwa adanya perbedaan nilai energi dan fungsi gelombang keadaan dasar antara sebelum dan sesudah konstruksi potensial.

4. SIMPULAN

Persamaan energi dan fungsi gelombang untuksistem yang dipengaruhi oleh potensial Deng Fandari persamaan Schrodinger 1-dimensi dapat diselesaikan menggunakan metode NU dan konstruksi supersimetri. Energi dan fungsi gelombang keadaan dasar dari persamaan Schrodinger 1-dimensi untuk potensial Deng Fan dan hasil konstruksi pasangan potensial V_2 dapat ditentukan. Pasangan potensial V_2 mempunyai perbedaan energi dan fungsi gelombang keadaan dasar dengan potensial asli (potensial Deng Fan).

5. DAFTAR PUSTAKA

Suparmi, dkk. (2012). Analisis Fungsi Gelombang dan Spektrum Energi PotensialRosen Morse Menggunakan Metode Hipergeometri. *Jurnal Matematika & Sains*, *Vol. 17*(2), 71-77.

A. Suparmi, C. Cari, Beta Nur Pratiwi dan Dewanta Arya Nugraha. (2017).Construction of solvable potential partner of Generalized Hylleraas potential in onedimensionalSchrodinger system .*IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. *820*. 012023 (1-7).

D. Agboola. (2009). The Hulthén potential in D-dimensions.*Phys. Scr*..*vol.80*. 065304 (1-6)

Anil Kumar. (2014). Isospectral Hulth´en Potential.*International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, *vol.8*(2).419-422.

Benedict Iserom Ita, Alexander Immaanyikwa Ikeuba. (2013). Solutions of the Dirac Equation with Gravitationalplus exponential Potential. *Applied Mathematics*. 4. 1-6.

Shi-Hai Dong. (2011). Wave Equations in Higher Dimensions. (New York: Springer), Chapter 8, (97-108).

U. Laha and J. Bhoi. (2016).*Lat. Am. J. Phys. Educ10*. 301 (1-6).